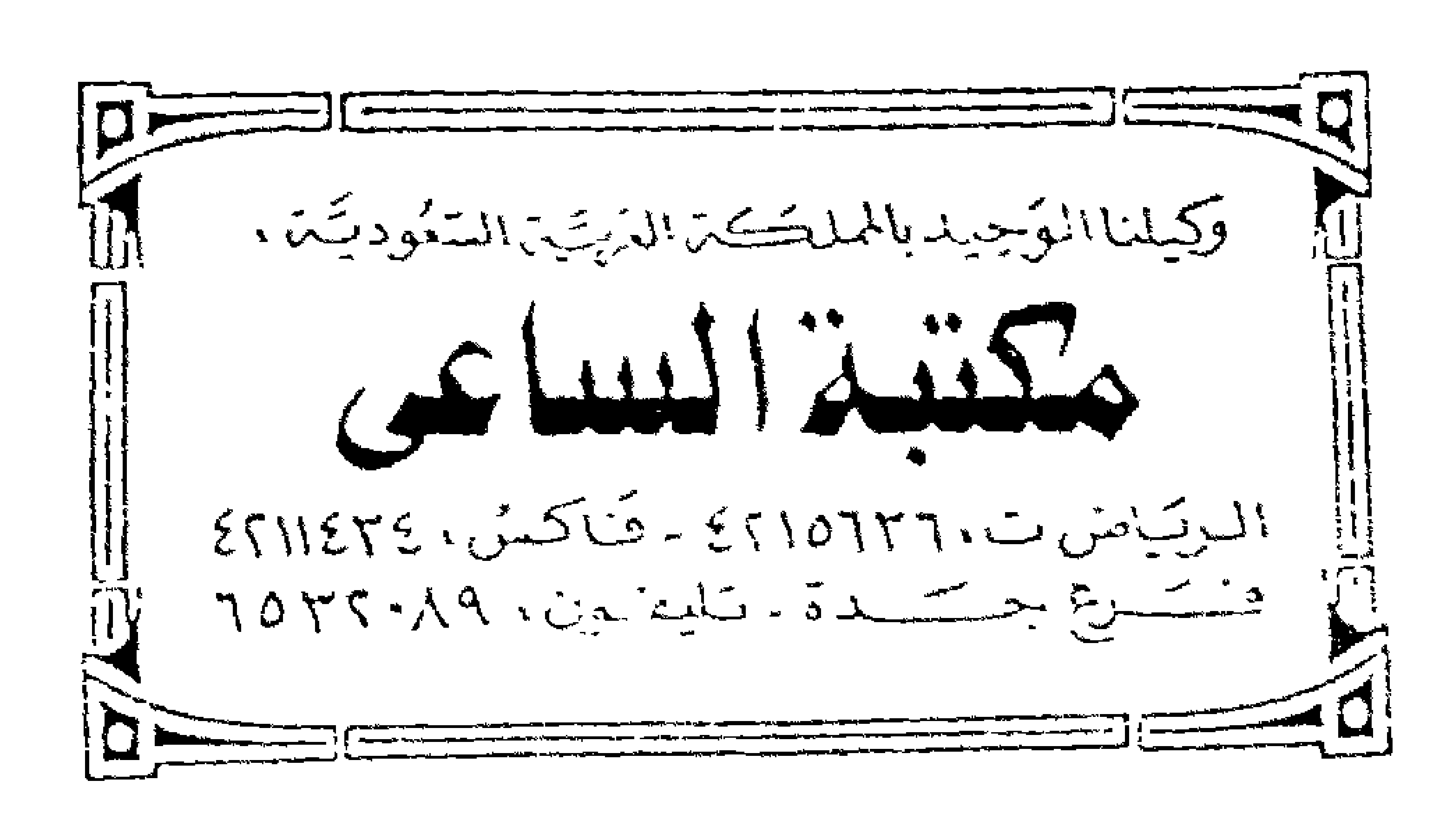

متعة . فن . ذكاء

مهندس عاطف أحمد منصور

الرياضيات المسلية

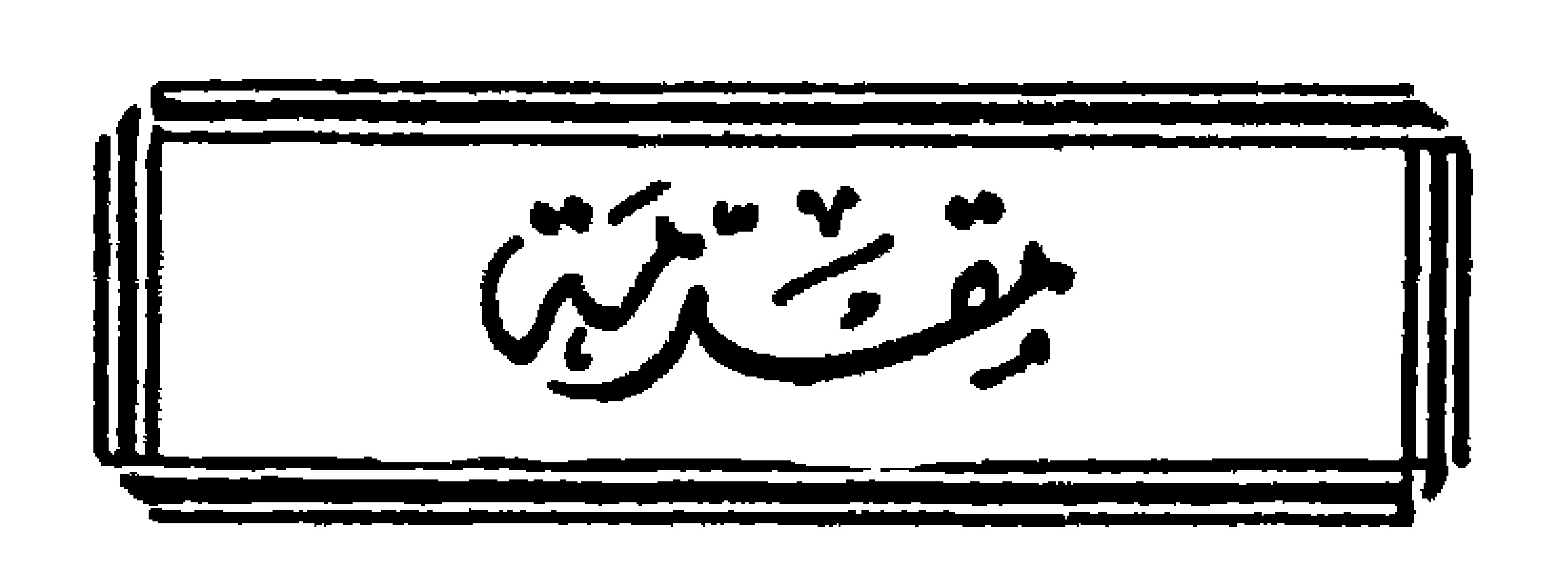
متعة . فن . ذكاء

مكتبة ابن سينا
للنشر والتوزيع والتصدير
٧٦ شارع محمد فريد - جامع الفتح - النزهة
مصر الجديدة القاهرة ت ٢٤٧٩٨٦٣ / ٢٤٨٠٤٨٣


وكيلنا الوحيد بالمملكة العربية السعودية :
مكتبة الساعى
الرياض ت ٤٢١٥٦٣٦٠ - فاكس ٤٢١١٤٢٤
فرع جدة - تليفون ٦٥٣٢٠٨٩



بسم الله الرحمن الرحيم



مقدمة

يتمتع علم الرياضيات بجاذبية خاصة وسحر أخاذ وبريق مبهر يستهوى الأفئدة ويأخذ بنواصى الألباب ..

فهو مادة إيقاظ الفكر وشحذ المواهب وبناء العقول ، إلى جانب كونه الأساس والقاعدة والدعامة والركيزة للعديد من العلوم الهامة التى بنت الحضارات وشيدت الصناعات وأقامت دولاً ورفعت أقواماً .

إن الرياضيات هى مادة البناء فى أبحاث الفضاء والفلك ، والأجهزة الإلكترونية التى دخلت جميع مجالات الحياة وتغلغلت بها وانتقلت بالناس من عالم إلى عالم آخر .. من عالم هادىء بطىء الحركة رتيبة الإيقاع إلى عالم ملىء بالحركة والقفزات والتطلعات الوثابة .

وبالرغم من أن الرياضيات مادة مشوّقة ، تميل النفس إلى دراستها والبحث فيها إلا أنها فى كثير من الأحيان تكون حجر عثرة أمام الكثيرين منا ، وذلك بسبب عدم استيعابنا لأصولها ونظرياتها وقوانينها .

ومما لا شك فيه أن هذا العجز عن الفهم لم يكن عيباً فى ذات المادة ولكنه نابع من ذاتنا نحن !!

لقد اعتاد طلابنا دراسة الرياضيات لهدف واحد وهو اجتياز الاختبارات ، وبالتالى لم يطلقوا لأنفسهم العنان حتى يستوضحوا الجوانب الواسعة لهذا العلم ..

وكانت النتيجة أن نظروا إليها كمادة صماء مليئة بالمشاكل والتعقيدات ، لدرجة أن البعض نراه يطلق على أى مشكلة مستعصية الحل أنها « لوغاريتمات رياضية » !!

مع أن اللوغاريتمات هذه تعد بمثابة الوسيلة لحل المشاكل وليست لتعقيدها ! إنه لكى يتسنى لنا فهم وإدراك كُنْه الرياضيات علينا أن نخوض غمارها ليس بعقلنا فقط بل بروحنا وعواطفنا أيضاً ، لأننا لابد أن نعايشها ونتآلف معها ونألفها ونأنس بها ، حتى يتحقق لنا الوصول إلى كل خفاياها حتى نستفيد من جدواها ومن استخداماتها التى لا تحصى .

ومن هذا المنطلق كان سعيى لتقديم هذا الكتاب الذى تضمنته بعض الطرق والأساليب التى تعرض المبادىء والنظريات الرياضية فى صورة حيوية ملموسة ، حتى يضع القارىء يده عليها ويتحسسها بدلاً من أن تكون محض خيال ونظريات غامضة يغرق فيها فلا يعرف له برًّا ، ولا إلى أين يسير !

لقد وضعت ألغازاً تحتاج فى حلها إلى معادلات ذات المجهول أو المجهولين أو أكثر وقمت بحلها ليتضح له معنى حل المعادلات وفائدتها واستخداماتها . وهذا ما يجعلها ترسخ فى ذهنه ويصبح قادراً على تطبيقها فى شتى مجالات الحياة هذا بالإضافة إلى مسائل أخرى للتدريب على الأسس واللوغاريتمات والاحتمالات وغيرها من الموضوعات التى انصهرت فيها النظريات والقوانين فى بوتقة اللغز

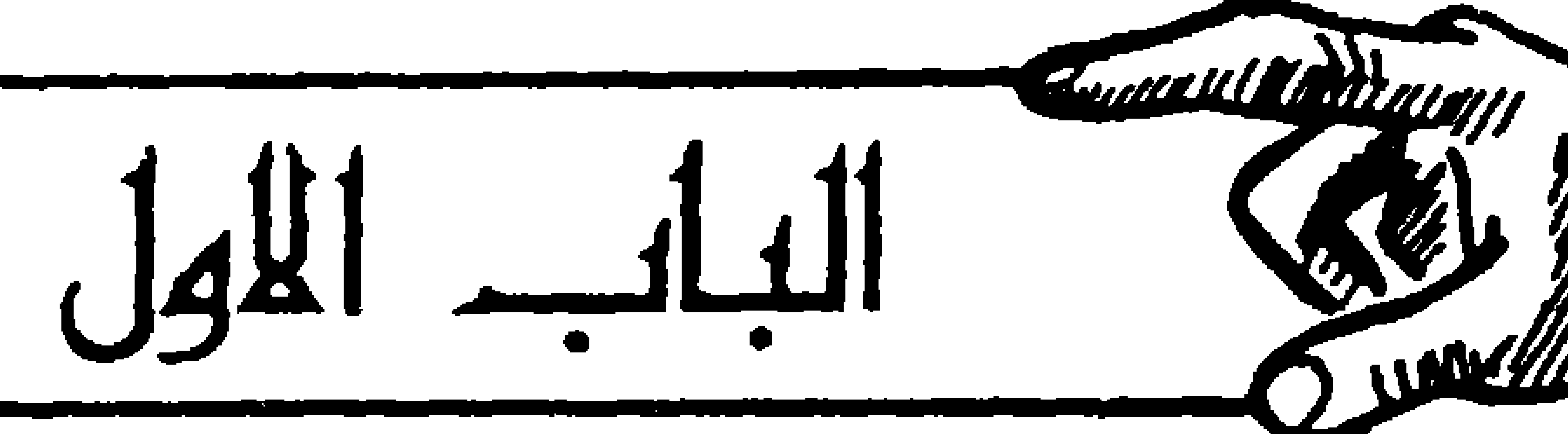
والفزورة والأحجية والمتاهة والمغالطة ونحوها . لتقدم فى أطباق المسليات والمشهيات فتصبح سائغة لذيذة سهلة لكل من يتناولها .

لقد جمعت فى هذا الكتاب بين هدفين .. الأول أن يتوفر فيه التشويق والتسلية والمرح . والثانى أن تكون من ورائه فائدة عظيمة ينتفع بها القارىء ويستفيد منها ، حتى لا يحس بأن وقته قد ضاع سدىً ، ولكنها المتعة المغذّية ، والتغذية المسلية فى آن معاً .

نسأل الله التوفيق والرشاد ...

مهندس / عاطف أحمد منصور

القاهرة فى جمادى الأولى ١٤١٠ هجرية
ديسمبر ١٩٨٩ ميلادية



الباب الاول

ألغاز رقمية

أطلب من زميلك أن يتخير أى عدد من صفر وحتى ٩٩ ولايخبرك به ، ثم اطلب منه القيام بعدة عمليات حسابية بسيطة وبعدها سوف تخبره بالرقم الذى تخيره .

وفيما يلى العمليات المطلوب من زميلك أن يؤديها وبنفس التسلسل : —

١ — أن يكتب عمره بالسنوات الصحيحة فى ورقة
٢ — أن يضاعف عمره
٣ — أن يضيف ٥ للمجموع
٤ — أن بضرب الناتج فى مائة (× ١٠٠)
٥ — أن يقسم الناتج على ٢
٦ — أن يطرح من الناتج عدد أيام السنة (٣٦٥)
٧ — أن يضيف للناتج العدد الذى تخيره فى البداية ثم يخبرك بالناتج النهائى

وبعد هذا يأتى دورك أنت ، فعليك أن تضيف للناتج ١١٥ فستحصل على عدد مكون من أربعة أرقام (فى حالة العمر أكبر من عشر سنوات) أو ثلاثة أرقام (فى حال العُمر أقل من عشر سنوات)
فالرقمان اللذان على اليسار فى العدد هما عمر زميلك بالسنوات بينما الرقمان على اليمين هما العدد الذى اختاره أولا .

وفيما يلى مثالين لتوضيح هذا ، مرة فى حالة العُمر أكبر من عشر سنوات ومرة ثانية فى حالة العمر أقل من عشر سنوات .

نفترض أولا أنه اختّار رقم ٦٠
ولنفرض أن عمره هو ٤٠ عاما
وبتطبيق العمليات الحسابية السابقة
∴ العمر = ٤٠
∴ ضعف العمر = ٨٠
يضاف ٥ للعمر = ٨٥
يضرب × ١٠٠ = ٨٥٠٠

يقسم على ٢ = ٤٢٥٠

يطرح ٣٦٥ = ٤٢٥٠ − ٣٦٥ = ٣٨٨٥

يضيف لهذا الناتج العدد الذى إختاره (٦٠) : −

= ٣٨٨٥ + ٦٠ = ٣٩٤٥

أضف لهذا الناتج الأخير ١١٥ = ٣٩٤٥ + ١١٥ = ٤٠٦٠

وهو عدد مكون من ٤ أرقام (٠ ، ٦ ، ٠ ، ٤)

فالرقمان على اليمين (٦٠) هما العدد الذى إختاره

والرقمان على اليسار (٤٠) هما عمر زميلك

ومرة ثانية :

نفرض أنه إختار العدد ٨٧ وعمره ٩ سنوات

∴ العمر = ٩

ضعف العمر = ١٨

يضيف ٥ للعمر = ٢٣

يضرب × ١٠٠ = ٢٣٠٠

يقسم على ٢ = ١١٥٠

يطرح ٣٦٥ = ١١٥٠ − ٣٦٥ = ٧٨٥

يضيف رقم ٨٧ = ٧٨٥ + ٨٧ = ٨٧٢

ثم قم أنت باضافة ١١٥ = ٨٧٢ + ١١٥ = ٩٨٧

وهو عدد مكون من ثلاث أرقام (٧ ، ٨ ، ٩)

فالرقمان على اليمين (٨٧) هما العدد الذى إختاره

والرقمان على اليسار (٩) هو عمره بالسنوات

◀ الإثبات الرياضى :

١ ـ نفترض أن رقم أحاد العدد الذى تخيره صديقك هو س وأن رقم عشراته هو ص .

∴ فالعدد يمكن كتابته كالتالى (س + ١٠ ص)

ولنفترض أن رقم آحاد العمر هو ع ورقم العشرات هو ل

∴ فالعمر يمكن كتابته على الصورة (ع + ١٠ ل) .

والآن نُجرى العمليات السابقة على العُمر .

الضرب × ٢ = ٢ (ع + ١٠ ل) = ٢ ع + ٢٠ ل

إضافة ٥ = ٢ ع + ٢٠ ل + ٥

الضرب × ١٠٠ = ٢٠٠ ع + ٢٠٠٠ ل + ٥٠٠

القسمة على ٢ = ١٠٠ ع + ١٠٠٠ ل + ٢٥٠

طرح ٣٦٥ = ١٠٠ ع + ١٠٠٠ ل + ٢٥٠ − ٣٦٥

= ١٠٠ ع + ١٠٠٠ ل − ١١٥

إضافة العدد الأول : (س + ١٠ ص) + ١٠٠ ع + ١٠٠٠ ل − ١١٥

إضافة ١١٥ : (س + ١٠ ص) + ١٠٠ ع + ١٠٠٠ ل

لاحظ أن العدد الأول (الرقمان على اليمين) أصبحا س + ١٠ ص وهو العدد المختار والعدد الآخر (الرقمان على اليسار) أصبحا ١٠٠ ع + ١٠٠ ل وهو العمر .

---

٢ ـ من عجائب الرقم ٩ أنك إذا ضربته فى أى رقم صحيح مهما كان فإن مجموع خانات الرقم الناتج يساوى إما العدد ٩ نفسه أو مضاعفاته .

◀ **الحـــل :**

كمثال :

٩ × ١ = ٩

٩ × ٢ = ١٨ ، ٨ + ١ = ٩

٩ × ٣ = ٢٧ ، ٧ + ٢ = ٩

٩ × ٤ = ٣٦ ، ٦ + ٣ = ٩

٩ × ٥ = ٤٥ ، ٥ + ٤ = ٩

وهكذا حتى نصل إلى :

٩ × ١٠ = ٩٠ ، ٠ + ٩ = ٩

٩ × ١١ = ٩٩ ، ٩ + ٩ = ١٨ ، ٨ + ١ = ٩

وهكذا حتى نصل إلى :

٩ × ١٣٥ (مثلاً) = ١٢١٥ ، ٥ + ١ + ٢ + ١ = ٩

، ٩ × ٧٣٨ (مثـــــلاً) = ٦٦٤٢ ، ٢ + ٤ + ٦ + ٦ = ١٨ ،
٨ + ١ = ٩

وهكذا .

٣ ـ عند ضرب العدد ٣٧ فى الرقم ٣ ومضاعفاته (٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ...) فإننا نحصل على عدد ، آحاده وعشراته ومئاته هى نفس الرقم .

◀ الحـــل :

وكمثال :

٣٧ × ٣ = ١١١ ٣٧ × ١٢ = ٤٤٤

٣٧ × ٦ = ٢٢٢ ٣٧ × ١٥ = ٥٥٥

٣٧ × ٩ = ٣٣٣ ٣٧ × ١٨ = ٦٦٦ وهكذا .

أما إذا جعلنا العدد ٣٧ مقاماً لأى كسر اعتيادى بسطه عدد صحيح فإننا نحصل على كسر دورى كالتالى :

١/٣٧ = ٠,٠٢٧٠٢٧٠٢٧ ٤/٣٧ = ٠,١٠٨١٠٨١٠٨

٢/٣٧ = ٠,٠٥٤٠٥٤٠٥٤ ٥/٣٧ = ٠,١٣٥١٣٥١٣٥

٣/٣٧ = ٠,٠٨١٠٨١٠٨١ ٦/٣٧ = ٠,١٦٢١٦٢١٦٢

وهكذا حتى نصل إلى :

٣٥/٣٧ = ٠,٩٤٥٩٤٥٩٤٥

٣٦/٣٧ = ٠,٩٧٢٩٧٢٩٧٢



٤ ــ إن العدد ١٢٣٤٥٦٧٩ على الرغم من كبره ، حيث يبلغ إثنا عشرة مليوناً وثلاثمائة خمس وأربعون ألفاً وستمائة تسعة وسبعون ، هو أيضاً من الأعداد العجيبة فعند ضربه فى الرقم ٣ ومضعفاته فإننا نلاحظ الآتى .

٣٧٠ ٣٧٠ ٣٧ = ٣ × ١٢٣٤٥٦٧٩

٧٤٠ ٧٤٠ ٧٤ = ٦ × ١٢٣٤٥٦٧٩

١ ١١١ ١١١ ١١ = ٩ × ١٢٣٤٥٦٧٩

١٤٨ ١٤٨ ١٤٨ = ١٢ × ١٢٣٤٥٦٧٩

٢٢٢ ٢٢٢ ٢٢٢ = ١٨ ×

٣٣٣ ٣٣٣ ٣٣٣ = ٢٧ ×

٤٤٤ ٤٤٤ ٤٤٤ = ٣٦ ×

٥٥٥ ٥٥٥ ٥٥٥ = ٤٥ ×

٦٦٦ ٦٦٦ ٦٦٦ = ٥٤ ×

٧٧٧ ٧٧٧ ٧٧٧ = ٦٣ ×

٨٨٨ ٨٨٨ ٨٨٨ = ٧٢ ×

٩٩٩ ٩٩٩ ٩٩٩ = ٨١ ×

١٠٣٧ ٠٣٧ ٠٣٧ = ٨٤ ×

١٠٧٤ ٠٧٤ ٠٧٤ = ٨٧ ×

٥ ــ ١٠٩٨ :

١٠٩٨ = ٨٨٨ + ٢١٠   ١٠٩٨ = ٤٤٤ + ٦٥٤

١٠٩٨ = ٧٧٧ + ٣٢١   ١٠٩٨ = ٣٣٣ + ٧٦٥

١٠٩٨ = ٦٦٦ + ٤٣٢   ١٠٩٨ = ٢٢٢ + ٨٧٦

١٠٩٨ = ٥٥٥ + ٥٤٣   ١٠٩٨ = ١١١ + ٩٨٧

يلاحظ أنه فى جميع الحالات فإن المجموع واحد ويساوى ١٠٩٨ بينما أحد العددين هو ١١١ ومضاعفاته أى ٢٢٢ ، ٣٣٣ ،...

والعدد الآخر (الأول) يتكون من ثلاثة أرقام ، ويلاحظ أن رقم الآحاد بها هو (٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...، ٧) بينما رقم العشرات هو (١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٧ ، ٨) ورقم المئات هو (٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، ٨ ، ٩) .

---

٦ ـ عودة لعجائب الرقم ٩ :

٩ × صفر + ١ = ١

٩ × ٠١ + ٢ = ١١

٩ × ١٢ + ٣ = ١١١

٩ × ١٢٣ + ٤ = ١١١١

٩ × ١٢٣٤ + ٥ = ١١١١١

وهكذا حتى :

٩ × ١٢٣٤٥٦٧ + ٨ = ١١١١١١١١

[١١ مليون ، ١١١ ألف ، ١١١]

---

٧ ـ إذا جعلنا العدد ١١ مقاماً للكسر اعتيادى بسطه رقم صحيح نحصل على كسر دائر كالتالى :

١ / ١١ = ٠,٠٩٠٩٠٩٠٩

٢ / ١١ = ٠,١٨١٨١٨١٨

٣ / ١١ = ٠,٢٧٢٧٢٧٢٧

٤ / ١١ = ٠,٣٦٣٦٣٦٣٦

٥ / ١١ = ٠,٤٥٤٥٤٥٤٥٤

وهكذا حتى نصل إلى :

١٠ / ١١ = ٠,٩٠٩٠٩٠٩٠

---

٨ ـ إختر ثلاثة أعداد صحيحة متتالية .

اضرب الأول فى الثانى ثم اضرب الثانى فى الثالث .

أوجد الفرق بين حاصلى الضرب تجده يساوى ضعف الرقم الأوسط .

◀ الحـــل :

نفترض أننا إخترنا الأعداد :

١٦ ، ١٧ ، ١٨ فنجد أن

١٦ × ١٧ = ٢٧٢

١٧ × ١٨ = ٣٠٦

، ٣٠٦ − ٢٧٢ = ٣٤

ويُلاحظ أن ٣٤ هى ضعف العدد ١٧

الإثبات :

لنفترض أن العدد الأول = س

∴ العدد الذى يليه = س + ١

، العدد الذى يليه = س + ٢

، س (س + ١) = س^{٢} + س ....

، (س + ١) (س + ٢) = س^{٢} + ٣ س + ٢ .... (٢)

، الفرق بين (٢) ، (١) = ٢ س + ٢ = ٢ (س + ١)

∴ الفرق = ضعف الرقم الأوسط .

٩ ـ إختر أى ثلاثة أعداد زوجية أو فردية متتالية واجر عليها نفس الخطوات السابقة فماذا تلاحظ ؟

◀ الحـــل :

نفترض الأعداد الزوجية هى :

١٢ ، ١٤ ، ١٦

، ١٢ × ١٤ = ١٦٨

، ١٤ × ١٦ = ٢٢٤

، ٢٢٤ − ١٦٨ = ٥٦

ويلاحظ أن ٥٦ = ٤ × ١٤

، نفترض أننا تخيرنا الأرقام الفردية التالية .

٧ ، ٩ ، ١١

∴ ٧ × ٩ = ٦٣

، ٩ × ١١ = ٩٩

، ٩٩ − ٦٣ = ٣٦ = ٤ × ٩

أى أن الفرق هنا هو أربعة أضعاف الرقم الأوسط .

ويمكنك إثباتها بسهولة كما سبق ورأينا .

١٠ ـ إذا جمعنا أى عدد مع معكوسه فإننا نحصل على عدد يقبل القسمة على ١١ . (العدد من خانتين فقط) .

◀ **الحـــل :**

أنظر إلى الأمثلة التالية :

٩٨ + ٨٩ = ١٨٧

٩٧ + ٧٩ = ١٧٦

٩٦ + ٦٩ = ١٦٥

٩٥ + ٥٩ = ١٥٤

وهكذا حتى :

٩١ + ١٩ = ١١٠

٩٠ + ٠٩ = ٩٩

وفيما يلى الإثبات .

نفرض أن رقم الآحاد فى العدد المختار هو س ، ص رقم العشرات

∴ العدد = س + ١٠ ص

، معكوس العدد = ص + ١٠ س

وبالجمع :

∴ العدد + معكوسه = ١١س + ١١ص = ١١ (س + ص)

أى أنه يقبل القسمة على ١١

١ × ٤ = ٢ × ٢ ومنها ٢١ × ٢٤ = ١٢ × ٤٢ = ٥٠٤

، ١ × ٦ = ٢ × ٣ ومنها أيضاً ٢١ × ٣٦ = ١٢ × ٦٣ = ٧٥٦

ومنها أيضاً ٣١ × ٢٦ = ١٣ × ٦٢ = ٨٠٦

، ١ × ٨ = ٢ × ٤ ومنها ٢١ × ٤٨ = ١٢ × ٨٤ = ١٠٠٨

ومنها أيضاً ٤١ × ٢٨ = ١٤ × ٨٢ = ١١٤٨

، ١ × ٩ = ٣ × ٣ ومنها ٣١ × ٣٩ = ١٣ × ٩٣ = ١٢٠٩

، ٢ × ٦ = ٤ × ٣ ومنها ٤٢ × ٣٦ = ٢٤ × ٦٣ = ١٥١٢

ومنها أيضاً ٣٢ × ٤٦ = ٢٣ × ٦٤ = ١٤٧٢

، ٢ × ٨ = ٤ × ٤ ومنها ٤٢ × ٤٨ = ٢٤ × ٨٤ = ٢٠١٦

، ٢ × ٩ = ٣ × ٦ ومنها ٣٢ × ٦٩ = ٢٣ × ٩٦ = ٢٢٠٨

ومنها أيضاً ٦٢ × ٣٩ = ٢٦ × ٩٣ = ٢٤١٨

، ٣ × ٨ = ٤ × ٦ ومنها ٤٣ × ٦٨ = ٣٤ × ٨٦ = ٢٩٢٤

ومنها أيضاً ٦٣ × ٤٨ = ٣٦ × ٨٤ = ٣٠٢٤

، ٤ × ٩ = ٦ × ٦ ومنها ٦٤ × ٦٩ = ٤٦ × ٩٦ = ٤٤١٦

وهكذا وعليك عزيزى القارىء بمحاولة إثبات هذه الأعجوبة .

***

١١ ـ (أ) إن العدد ٣٣٧ إذا ضرب فى ٣ ومضاعفاته فإننا نحصل على نواتج ، أرقامها ذات تسلسل معين كالآتى :

◀ **الحـــل :**

٣٣٧ × ٣ = ١٠١١ ٣٣٧ × ٩ = ٣٠٣٣

٣٣٧ × ٦ = ٢٠٢٢ ٣٣٧ × ١٢ = ٤٠٤٤

٦٠٦٦ = ١٨ × ٣٣٧ ٥٠٥٥ = ١٥ × ٣٣٧

٧٠٧٧ = ٢١ × ٣٣٧

وهكذا حتى :

٩٠٩٩ = ٢٧ × ٣٣٧

(ب) ٣٠٣٧ :

◀ **الحـــل :**

نفس الشيء مع العدد ٣٠٣٧ فعند ضربه فى الرقم ٣ ومضاعفاته فإننا نحصل على أعداد أرقامها ذات تسلسل معين كالآتى :

٩ ١١١ = ٣ × ٣٠٣٧

١٨ ٢٢٢ = ٦ × ٣٠٣٧

٢٧ ٣٣٣ = ٩ × ٣٠٣٧

٣٦ ٤٤٤ = ١٢ × ٣٠٣٧

وهكذا حتى :

٨١٩٩٩ = ٢٧ × ٣٠٣٧

(جـ) ٣٧٣٧ :

عند ضربه فى ٣ ومضاعفاتها نحصل على تسلسل غريب من الأعداد كما يلى :

١١٢١١ = ٣ × ٣٧٣٧

٢٢٤٢٢ = ٦ ×

٣٣٦٣٣ = ٩ ×

٤٤٨٤٤ = ١٢ ×

٥٦٠٥٥ = ١٥ ×

٦٧٢٦٦ = ١٨ ×

٧٨٤٧٧ = ٢١ ×

٨٩٦٨٨ = ٢٤ ×

× ٢٧ = ١٠٠٨٩٩

× ٣٠ = ١١٢١١٠

× ٣٣ = ١٢٣٣٢١

د) ٣٣٠٣٣ :

٣٣٠٣٣ × ٣ = ٩٩٠٩٩

× ٦ = ١٩٨١٩٨

× ٩ = ٢٩٧٢٩٧

× ١٢ = ٣٩٦٣٩٦

× ١٥ = ٤٩٥٤٩٥

× ١٨ = ٥٩٤٥٩٤

وهكذا حتى :

× ٣٠ = ٩٩٠٩٩٠

وكذلك :

× ٢ = ٦٦٠٦٦

× ٤ = ١٣٢١٣٢

× ٦ = ١٩٨١٩٨

× ٨ = ٢٦٤٢٦٤

وهكذا حتى ٣٣٠٣٣ × ٥٠ = ١٦٥١٦٥٠ .

، وكذلك :

٣٣٠٣٣ × ٥ = ١٦٥١٦٥

× ١٠ = ٣٣٠٣٣٠

× ١٥ = ٤٩٥٤٩٥

وهكذا حتى نصل إلى

٣٣٠٣٣ × ٩٠ = ٢٩٧٢٩٧٠

(هـ) ٣٧٠٣٧ :

٣٧٠٣٧ × ٣ = ١١١ ١١١

× ٦ = ٢٢٢ ٢٢٢

× ٩ = ٣٣٣ ٣٣٣

× ١٢ = ٤٤٤ ٤٤٤

وهكذا حتى نصل إلى :

٣٧٠٣٧ × ٢٧ = ٩٩٩٩٩٩

× ٣٠ = ١١١١١١٠

× ٣٣ = ١٢٢٢٢٢١

× ٣٦ = ١٣٣٣٣٣٢

× ٣٩ = ١٤٤٤٤٤٣

وهكذا حتى :

٣٧٠٣٧ × ٨١ = ٢٩٩٩٩٩٧

وكذلك :

٣٧٠٣٧ × ٢ = ٧٤٠٧٤

× ٤ = ١٤٨١٤٨

× ٦ = ٢٢٢٢٢٢

× ٨ = ٢٩٦٢٩٦

× ١٠ = ٣٧٠٣٧٠

× ١٢ = ٤٤٤٤٤٤

وهكذا يمكن تكوين عدد كبير جداً من الأعداد العجيبة .

١٢ ـ كيف يمكنك أن تعبر عن العدد ١٠ باستعمال خمسة تسعات (٩) ومسموح باستخدام الرموز والعلامات المستعملة فى العمليات الرياضية .

◀ **الحــل :**

١ ـ $\frac{٩٩}{٩٩} \;\; ٩ = ١٠$

٢ ـ $\frac{٩٩}{٩٩} + ٩ = ١٠$

٣ ـ $\frac{٩٩}{٩} - \frac{٩}{٩} = ١٠$

٤ ـ $\frac{٩}{٩} + \frac{٩ \times ٩}{٩} = ١٠$

٥ ـ $\frac{٩ + ٩}{٩ + ٩} + ٩ = ١٠$

٦ ـ $\frac{٩ + ٩ - ٩}{٩} + ٩ = ١٠$

٧ ـ $(\frac{٩}{٩} \;\; ٩)^{\frac{٩}{٩}} = ١٠$

٨ ـ $٩ + (٩٩)^{٩-٩} = ١٠$

٩ ـ $(\frac{٩}{٩})^{\frac{٩}{٩}} + ٩ = ١٠$

١٠ ـ لو$_{٩}(٩)^{٩} + \frac{٩}{٩} = ٩$ لو$_{٩}$ $٩ + ١ = ٩ \times ١ + ١ = ١٠$

---

١٣ ـ كيف يمكنك أن تعبر عن رقم ١ باستعمال كل الأرقام من صفر إلى تسعة مستعملاً الرموز والعلامات الرياضية المختلفة .

◀ **الحــل :**

١ ـ $\frac{١٤٨}{٢٩٦} + \frac{٣٥}{٧٠} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ١$

٢ ـ $(٩٨٧٦٥٤٣٢١)^{\text{صفر}}$

= ١ [ويمكن تغيير وضع الأرقام هكذا : $(١٢٣٤٥٦٧٨٩)^{\text{صفر}}$

٣ ـ $(٤٥٦٧٨٩٠)^{٣-٢-١}$

٤- $\left(\frac{١٢٣}{٤} + \frac{٥٦٧٨}{٩}\right)^{\text{صفر}}$

= ١ [ويمكن إعادة تغيير وضع الأرقام داخل القوس ونحصل فى جميع الحالات على نفس الجواب]

٥ - $\left(\frac{١٢٣}{٦٥٤} + \frac{٨٧}{٩}\right)^{\text{صفر}} = ١$

١٤ ـ عبر عن العدد ١٠٠ باستعمال الأرقام من صفر إلى تسعة .

◀ **الحـــل :**

(١) $٧٠ + ٢٤\frac{٩}{١٨} + ٥\frac{٣}{٦} = ١٠٠$

(٢) $٨٧ + ٩\frac{٤}{٥} + ٣\frac{١٢}{٦٠} = ١٠٠$

(٣) $٨٠\frac{٢٧}{٥٤} + ١٩\frac{٣}{٦} = ١٠٠$

(٤) $٥٠\frac{١}{٢} + ٤٩\frac{٣٨}{٧٦} = ١٠٠$

(٥) $٨٣ + ٧٤ - ٥٠ - ٢٦ + ١٩ = ١٠٠$

١٥ ـ كيف يمكنك التعبير عن العدد ١٠٠ مستعملاً خمسة أرقام متساوية وبعدة طرق مختلفة .

◀ **الحـــل :**

١ ـ $(٥ + ٥ + ٥ + ٥) \times ٥ = ١٠٠$

٢ ـ $٥ \times ٥ \times ٥ - ٥ \times ٥ = ١٠٠$

٣ ـ $٣٣ \times ٣ + \frac{٣}{٣} = ١٠٠$

٤ ـ $١١١ - ١١ = ١٠٠$

١٦ ـ عبر عن العدد ١٠٠ مستعملاً ستة أرقام متساوية وبعدة طرق مختلفة .

◀ **الحـــل :**

$$\frac{١١١ - ١١}{١} = ١٠٠ \quad ، \quad \frac{٢٢٢ - ٢٢}{٢} = ١٠٠$$

$$، \frac{٣٣٣ - ٣٣}{٣} = ١٠٠ \quad ، ..... ، \quad \frac{٩٩٩ - ٩٩}{٩} = ١٠٠$$

$$، (٥ + ٥)(٥ + ٥)\ \text{لو}_{٥}\ ٥ = ١٠٠$$

---

١٧ ـ عبر عن العدد ١٠٠٠ باستعمال ستة أرقام متساوية . مسموح باستخدام العلامات والرموز الرياضية .

◀ **الحـــل :**

(١) $٣٣٣ \times ٣ + \frac{٣}{٣} = ١٠٠٠$

وهنالك عدة حلول أخرى، فحاول البحث عنها .

---

١٨ ـ عبر عن العدد ١٠٠٠ مستعملاً ثمانية أرقام متساوية . مسموح باستخدام العلامات والرموز الرياضية .

◀ **الحـــل :**

(١) $٨٨٨ + ٨٨ + ٨ + ٨ + ٨ = ١٠٠٠$

(٢) $٩٩٩ + \left(\frac{٩ + ٩}{٩}\right) - \frac{٩}{٩} = ١٠٠٠$

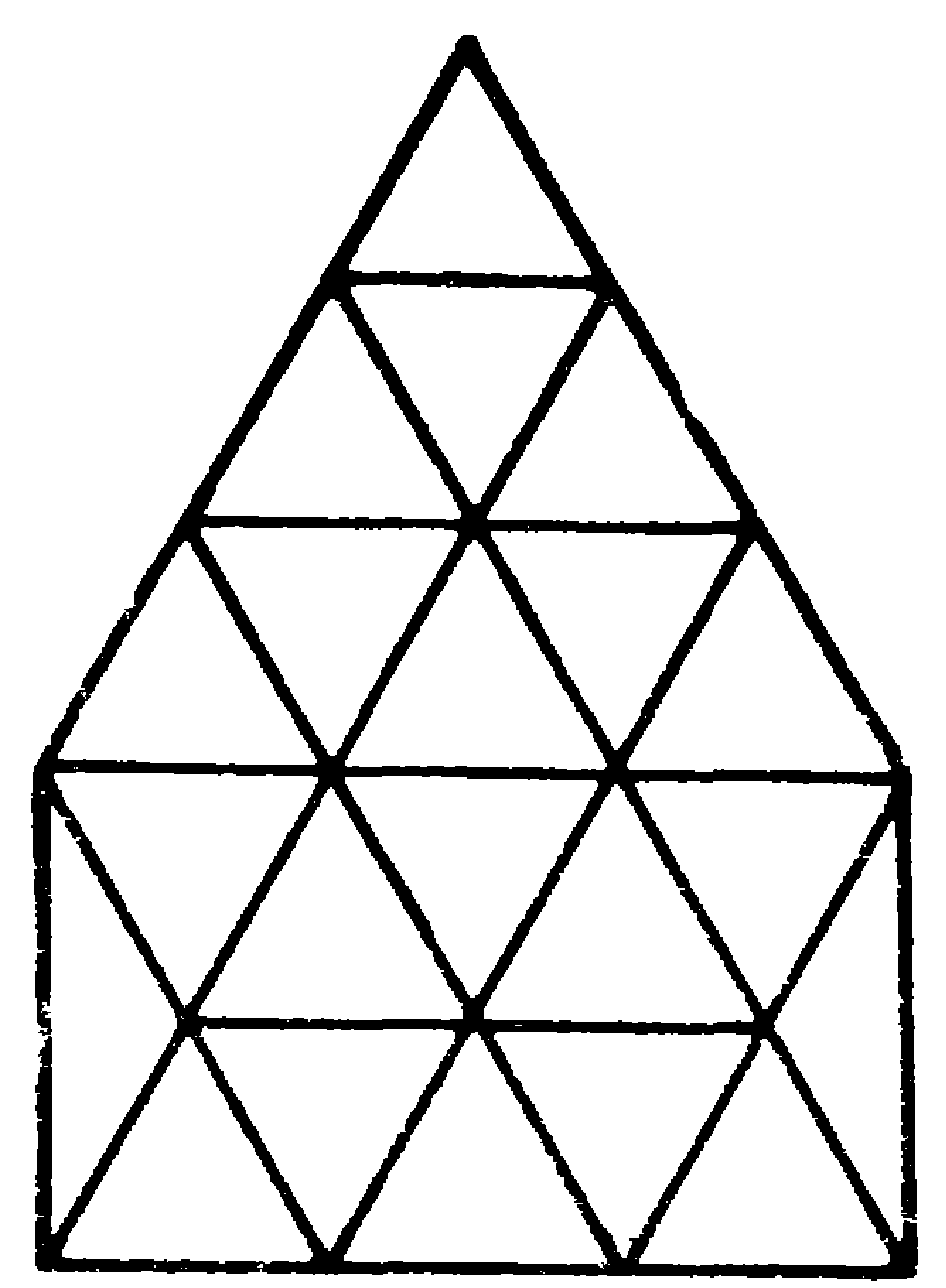
(٣) $(٥٥ - ٥) \times \frac{٥ + ٥}{٥} \times (٥ + ٥) = ١٠٠٠$

(٤) $(٥٥٥ - ٥٥) \times \left(\frac{٥ + ٥}{٥}\right) = ١٠٠٠$

حاول أن تجد حلول أخرى .

---

١٩ ـ فى الشكل المرفق حاول أن تعرف عدد المثلثات التى يتكون منها الشكل .

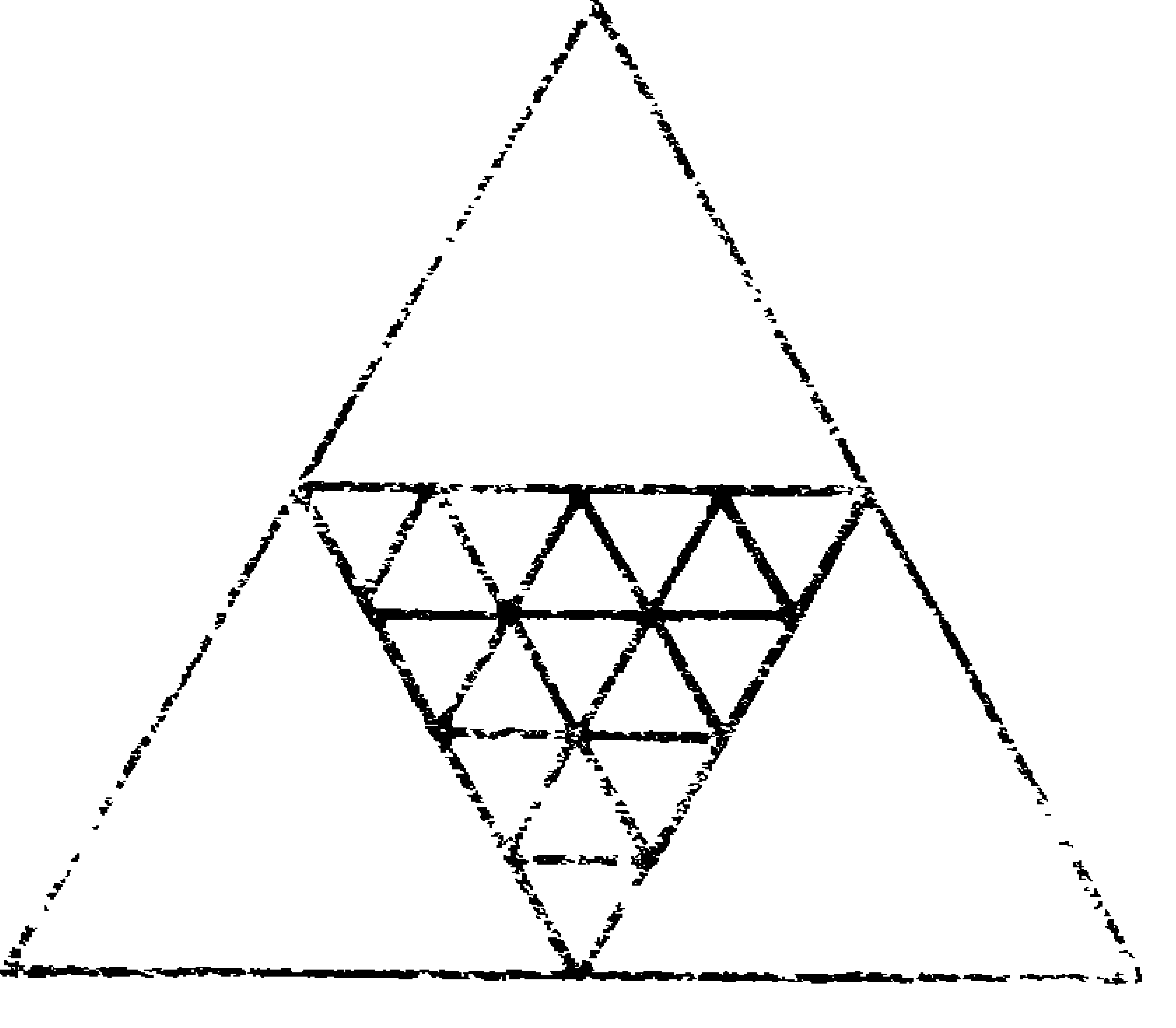


◄ الحـــل :

رقم المثلثات المرسومة أمامك فهى تُسهل لك الحل كثيراً وستجد أن العدد يزيد عن ٣٦ مثلثاً .

---

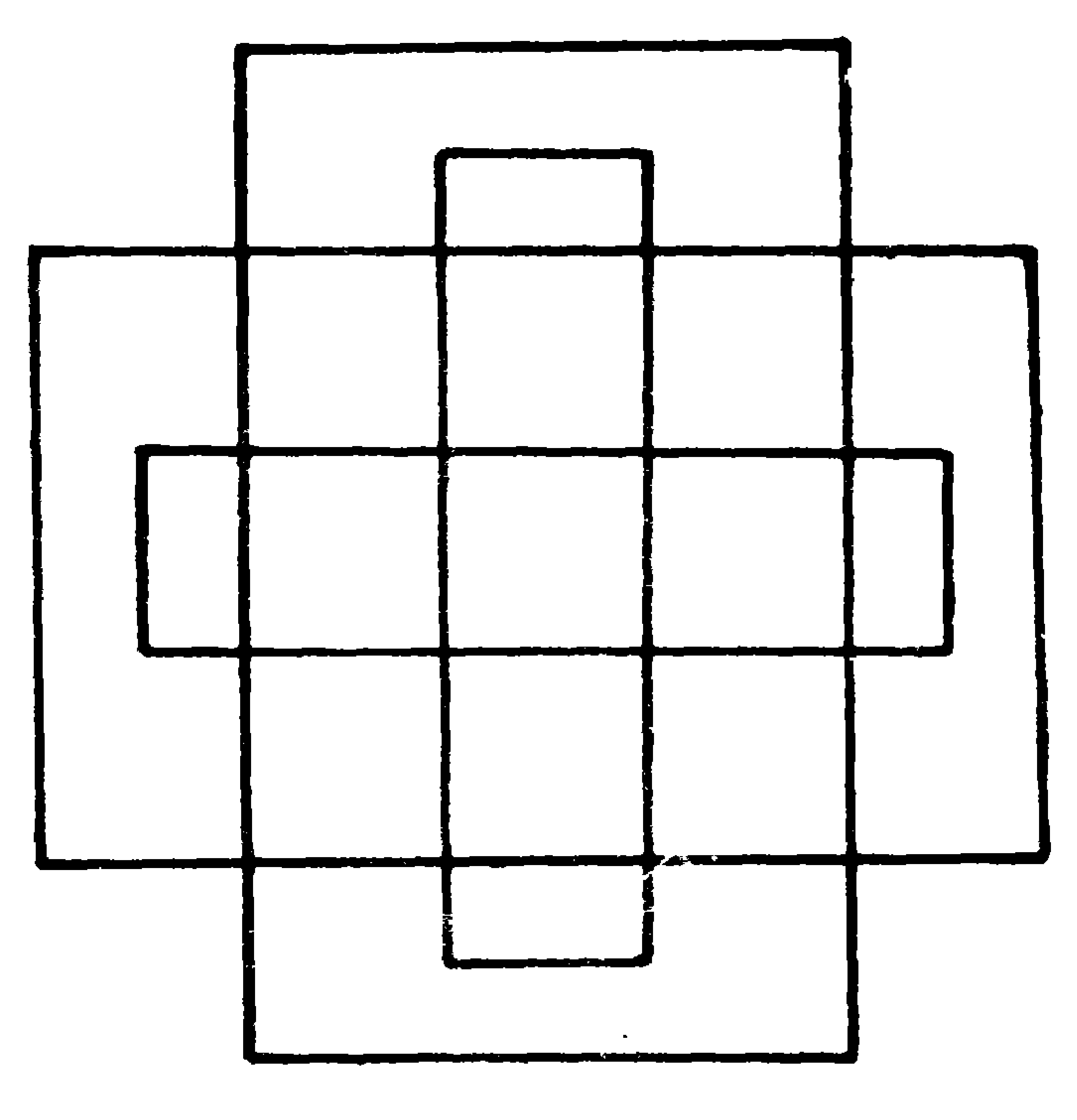
٢٠ ـ فى الشكل المرفق مطلوب معرفة عدد المثلثات التى يتكون منها الشكل .



◀ **الحـــل :**

الحل يزيد عن ٣٠ مثلثاً .

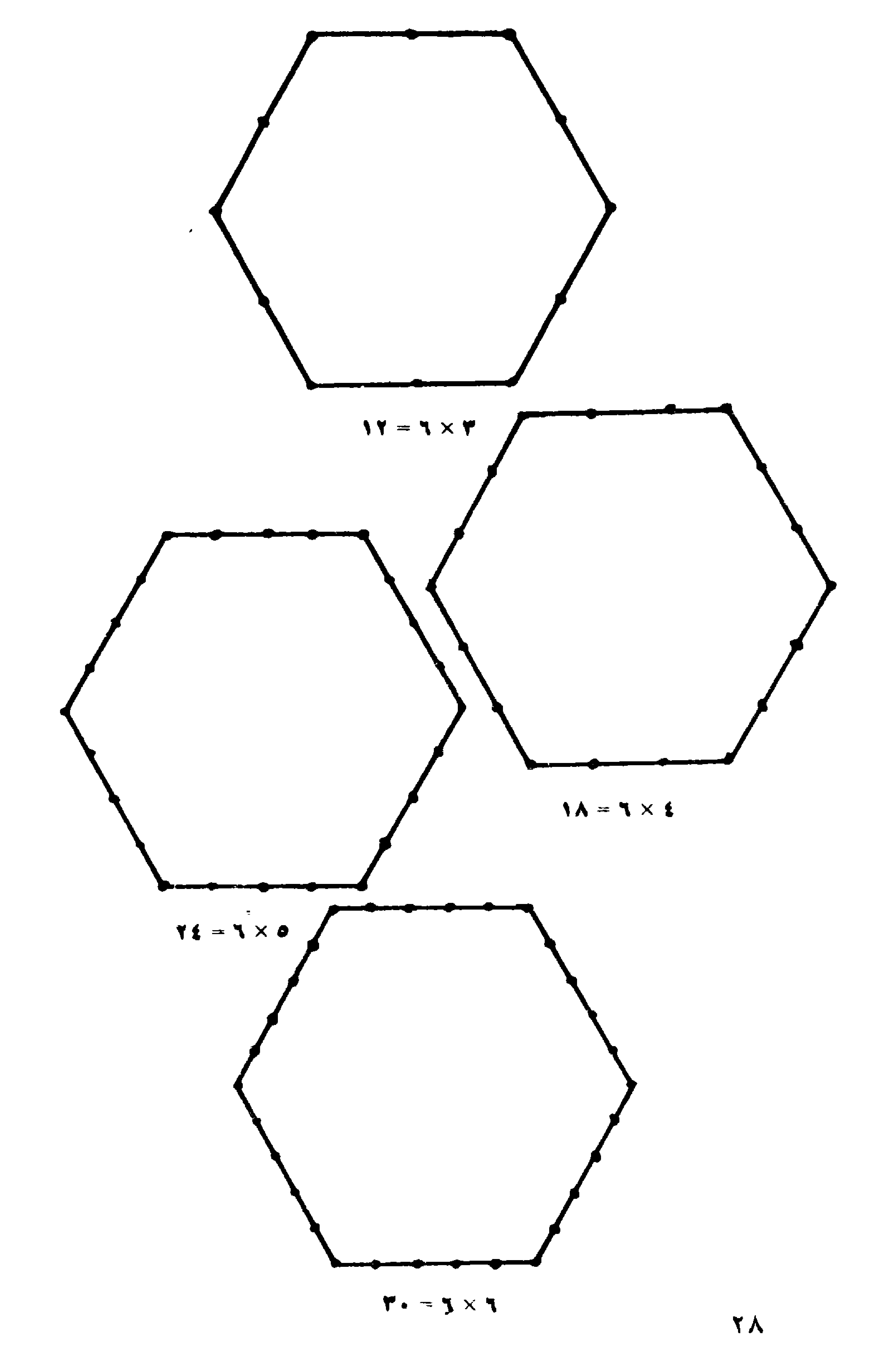
٢١ ـ فى الشكل المرفق مطلوب معرفة عدد المستطيلات المكونة لهذا الشكل .



٢٢ ـ كيف يمكنك ترتيب (رص) ١٢ شخصاً فى ستة صفوف كل صف به ثلاثة أشخاص .

◀ **الحـــل :**

لأول وهلة يبدو الأمر مستحيلاً فالستة صفوف التى يتكون كل منها من ثلاثة أشخاص يكون العدد الكلى بها ١٨ شخصاً وليس ١٢ ولكن بإمعان التفكير وبقليل من الحيلة يمكن ترتيبهم كما بالشكل .



١٢ = ٦ × ٣
١٨ = ٦ × ٤
٢٤ = ٦ × ٥
٣٠ = ٦ × ٦

وبالمثل فإنه يمكننا عمل الترتيبات الآتية :

١ ـ ١٨ شخصاً فى ستة صفوف كل صف به أربعة أشخاص .

٢ ـ ٢٤ شخصاً فى ستة صفوف كل صف به خمسة أشخاص .

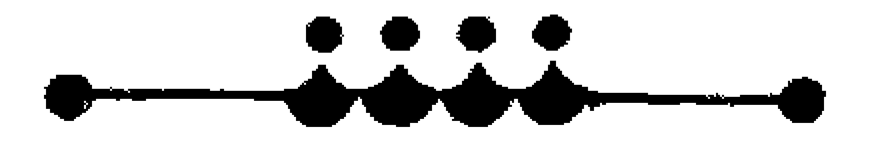
٣ ـ ٣٠ شخصاً فى ستة صفوف كل صف به ستة أشخاص .

كما بالرسوم المرفقة :

يلاحظ فى كل الأمثلة السابقة الآتى :

١٨ − ١٢ = ٦ ، ٢٤ − ١٨ = ٦ ، ٣٠ − ٢٤ = ٦ ، ٣٦ − ٣٠ = ٦

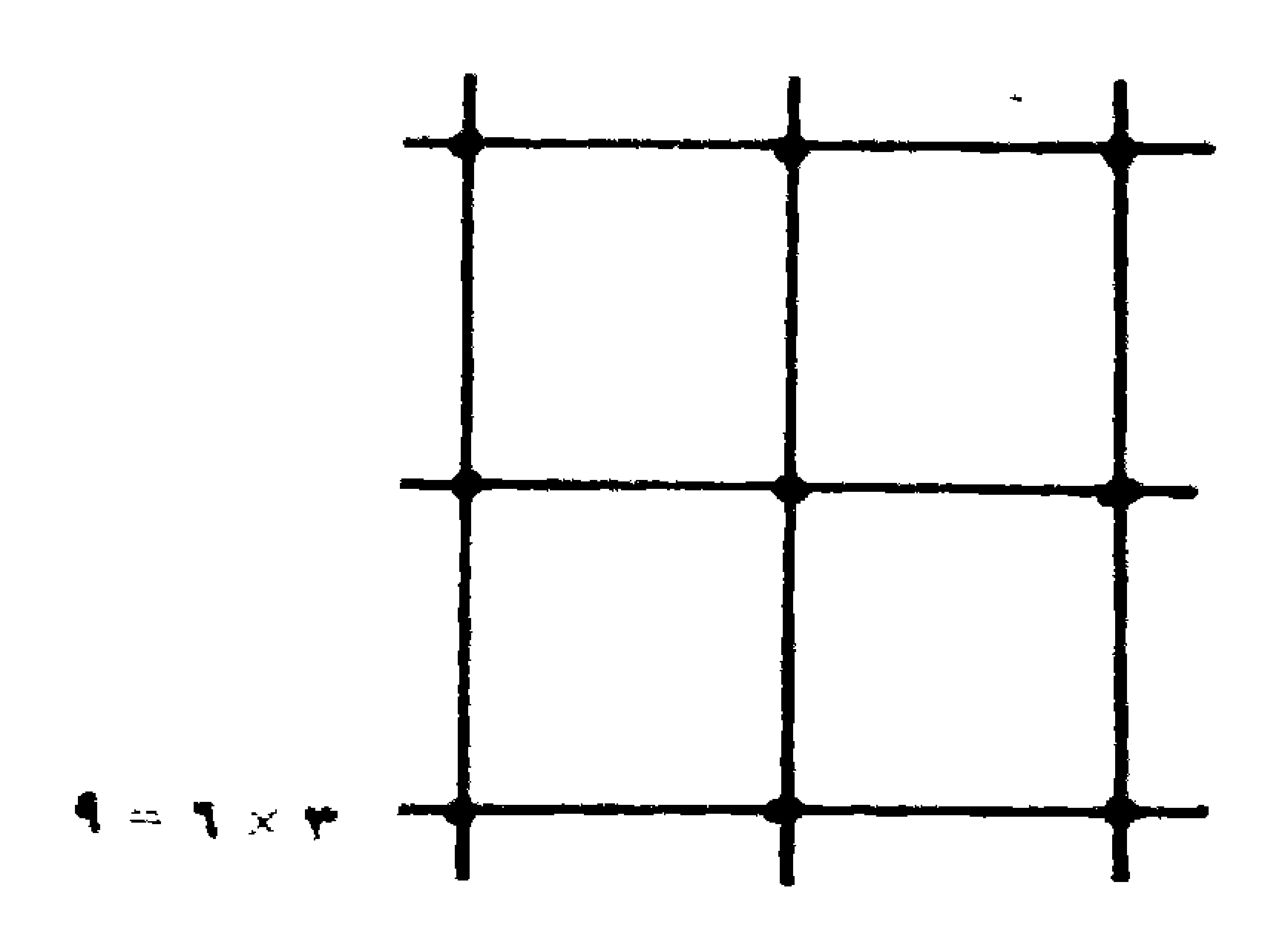
ورقم ٦ هذا يمثل رؤوس المسدس فعند كل رأس من رؤوس المسدس هنالك شخص يتم حسابه مرتان وفى هذه النقطة يكمن حل المسألة .



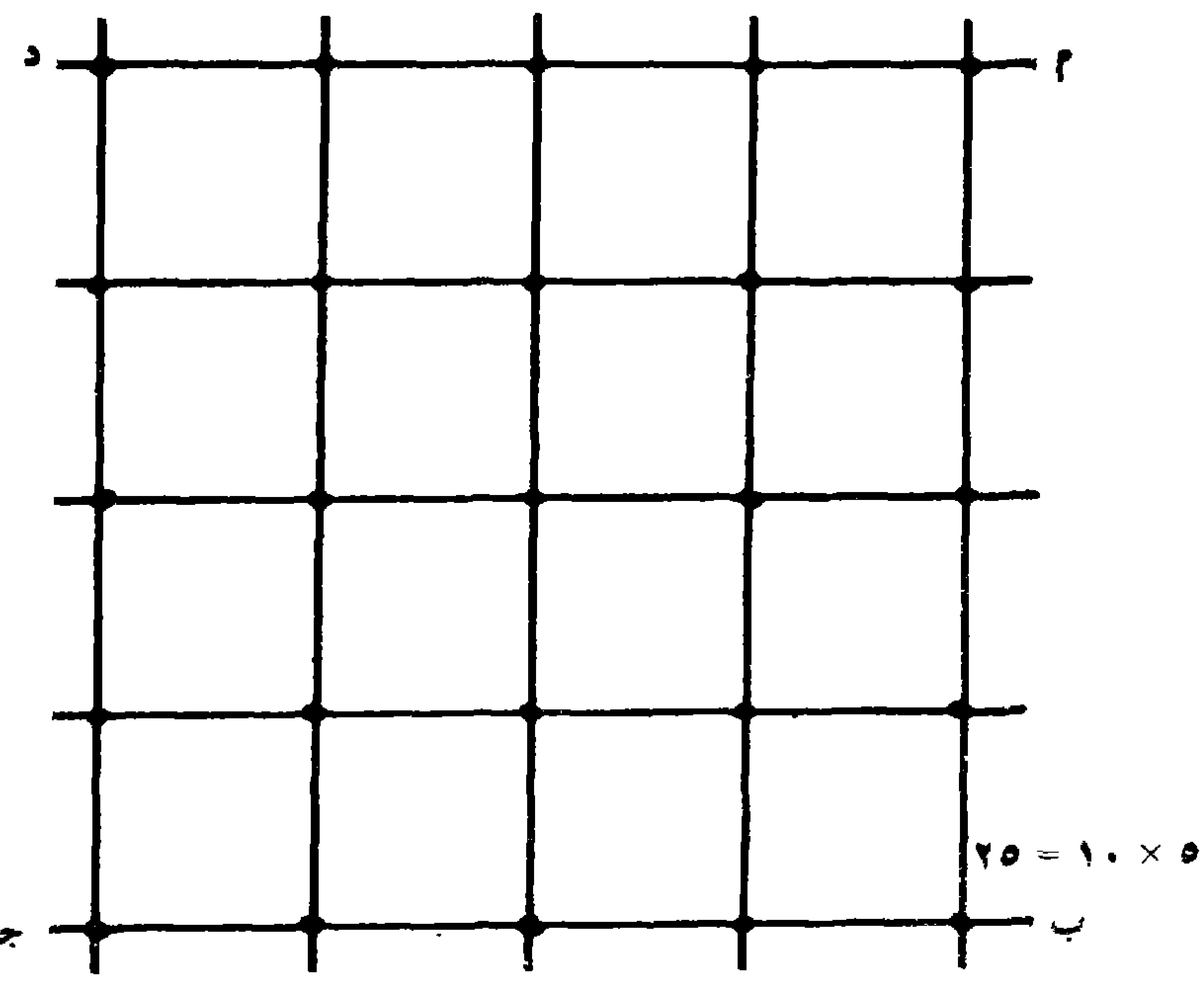
٢٣ ـ كيف يمكنك رص تسعة أشخاص فى ستة صفوف كل صف به ٣ أشخاص .

◄ ***الحـــل :***

يكون الحل كما بالشكل المرفق .



وبنفس الفكرة يمكن رص ٢٥ شخصاً فى عشرة صفوف كل صف به خمسة أشخاص ، وكذلك رص ١٦ شخصاً فى ثمانية صفوف كل صف به ٤ أشخاص .

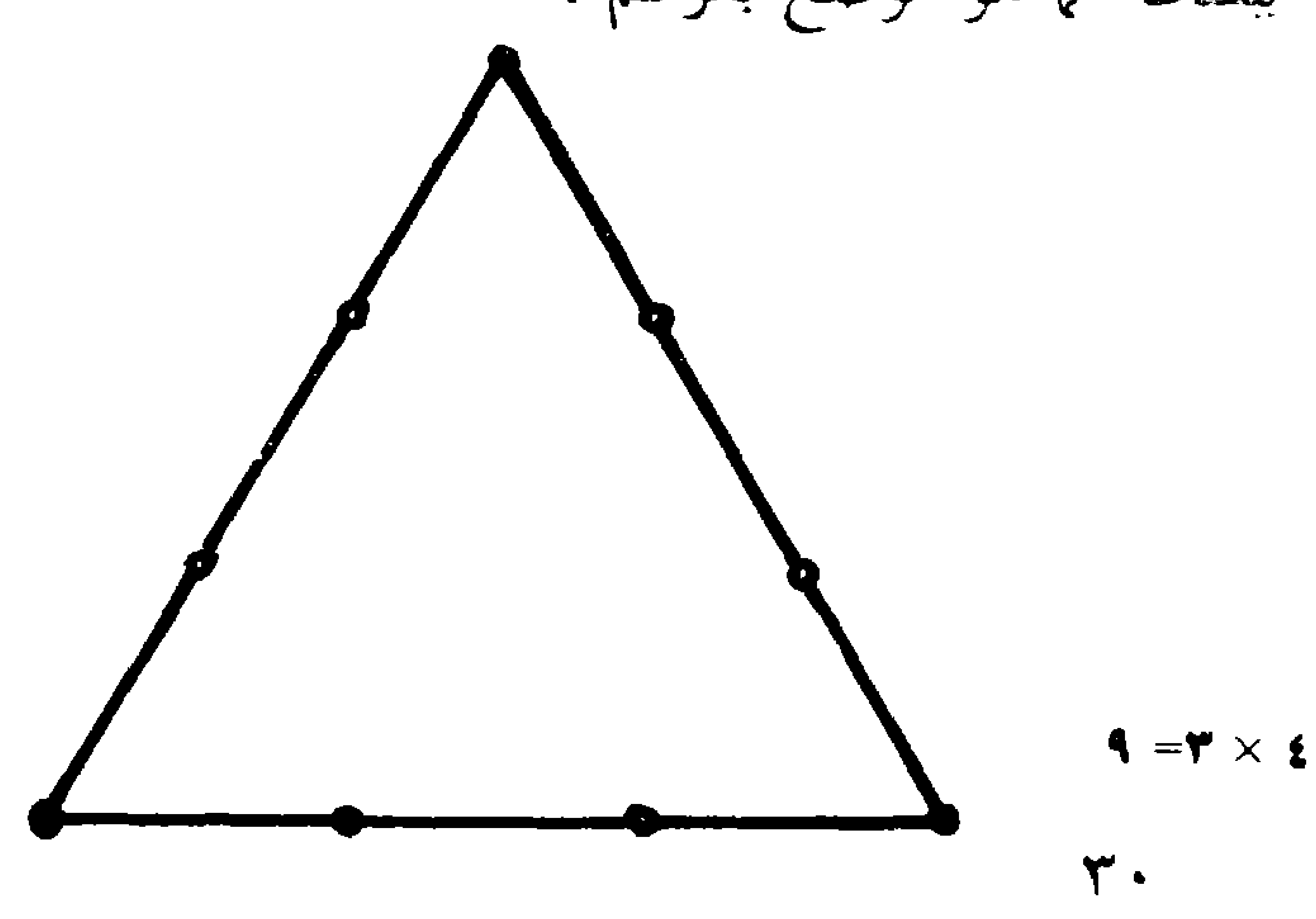


ومن الشكل الموضح (٥ × ١٠) يمكنك أن ترى حالة ١٦ شخصاً فى ثمانية صفوف كل صف به ٤ أشخاص (المربع ا ب جـ د)

٢٤ ـ كيف يمكنك رص تسعة أشخاص فى ثلاثة صفوف كل صف به ٤ أشخاص .

◄ **الحـــل :**

ببساطة كما هو موضح بالرسم .



◄ **أيهما أكبر :**

المطلوب معرفة أيهما أكبر :

$\sqrt[٣]{٣}$ أم $\sqrt{٢}$ وبدون استعمال آلات حاسبة وبدون حساب قيم الجذور

◄ **الحـــل :**

نلاحظ أن المضاعف المشترك لـ ٣ ، ٢ هو ٦ :

وعلى ذلك فيرفع كلا الطرفين للأس السادس أى للقوة السادسة .

$\therefore (\sqrt[٣]{٣})^{٦} = [(٣)^{\frac{١}{٣}}]^{٦} = ٣^{٢} = ٩$

، $(\sqrt{٢})^{٦} = [(٢)^{\frac{١}{٢}}]^{٦} = ٢^{٣} = ٨$

ولما كانت ٩ > ٨ فإن $٩^{\frac{١}{٦}} > ٨^{\frac{١}{٦}}$

وبالتالى فإن $\sqrt[٣]{٣} > \sqrt{٢}$

◄ **أيهما أكبر :**

المطلوب معرفة أيهما أكبر :

$\sqrt{٧}$ أم $\sqrt[٤]{١٤}$ ، بدون حساب قيم الجذور

◄ **الحـــل :**

$\sqrt{٧} = (٧)^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt[٤]{١٤} = (١٤)^{\frac{١}{٤}}$

ويرفع كلا من المقدارين إلى القوة الرابعة .

$\therefore [(٧)^{\frac{١}{٢}}]^{٤} = ٧^{٢} = ٧ \times ٧$

، $[(١٤)^{\frac{١}{٤}}]^{٤} = ١٤ = ٧ \times ٢$

وحيث أنه : ٧ × ٧ أكبر من ٢ × ٧ ،

عليه يكون $\sqrt{٧}$ أكبر من $\sqrt[٤]{١٤}$

وبنفس الطريقة نجد أن $\sqrt{٧}$ أكبر من $\sqrt[٣]{١٤}$

حيث أنه برفع كلاً من المقدارين إلى القوة السادسة :

$\therefore [٧^{\frac{١}{٢}}]^{٦} = ٧^{٣} = ٧ \times ٧ \times ٧$

، $[(١٤)^{\frac{١}{٣}}]^{٦} = ١٤^{٢} = ٧ \times ٧ \times ٢ \times ٢$

، $\therefore$ ٧ أكبر من ٢ × ٢ فعليه يكون $\sqrt{٧}$ أكبر من $\sqrt[٣]{١٤}$

◄ أيهما أكبر :

المطلوب معرفة أيهما أكبر : $\sqrt[٥]{٤}$ أم $\sqrt[٩]{٨}$

◄ الحل :

$\sqrt[٥]{٤} = (٤)^{\frac{١}{٥}}$

$\sqrt[٩]{٨} = (٨)^{\frac{١}{٩}}$

برفع كلا المقدارين للقوة الخامسة والأربعين (أس ٤٥)

$\therefore [(٤)^{\frac{١}{٥}}]^{٤٥} = ٤^{٩} = (٢ \times ٢)^{٩} = ٢^{٩} \times ٢^{٩} = ٥١٢ \times ٥١٢$

، $(٨^{\frac{١}{٩}})^{٤٥} = ٨^{٥} = ٨^{٢} \times ٨^{٣} = ٦٤ \times ٥١٢$

وواضح أن المقدار الأول أكبر من الثانى بالنسبة $\frac{٥١٢}{٦٤}$

أى ثمانية أضعاف $\therefore \sqrt[٥]{٤} > \sqrt[٩]{٨}$

◄ أيهما أكبر :

المطلوب معرفة أى المقدارين التاليين أكبر :

$(\sqrt{٥} + \sqrt{١٠})$ أم $(\sqrt{٨} + \sqrt{٧})$

وذلك بدون استعمال لوغاريتمات أو آلات حاسبة لإيجاد قيم الجذور .

◄ الحل :

نرفع كلاً من المقدارين إلى القوة الثانية :

$\therefore (\sqrt{٥} + \sqrt{١٠})^{٢} = ٥ + ٢\sqrt{٥٠} + ١٠$

$= ١٥ + ٢\sqrt{٥٠} = ١٥ + ٤\sqrt{١٢,٥}$

، $(\sqrt{٨} + \sqrt{٧})^{٢} = ٨ + ٢\sqrt{٥٦} + ٧$

$= ١٥ + ٢\sqrt{٥٦} = ١٥ + ٤\sqrt{١٤}$

ولما كان من البديهى أن $\sqrt{١٤}$ أكبر من $\sqrt{١٢,٥}$

∴ $(\sqrt{٨} + \sqrt{٧})$ أكبر من $(\sqrt{٥} + \sqrt{١٠})$

◀ بمجرد النظر :

أوجد قيمة س فى المقدار الآتى بمجرد النظر : $(س)^{س^{٦}} = ٦$

◀ الحـــل :

إذا وضعنا $س^{٦} = ص$

∴ $س = \sqrt[٦]{ص}$

وعليه فإن المقدار يصبح : $\left[(\sqrt[٦]{ص})^{(\sqrt[٦]{ص})^{٦}} \right] = ٦$

∴ $(ص^{\frac{١}{٦}})^{(ص^{\frac{١}{٦}})^{٦}} = ٦$

∴ $(ص^{\frac{١}{٦}})^{ص} = ٦$

∴ $(ص)^{\frac{ص}{٦}} = ٦$

وبرفع كلا الطرفين للقوة السادسة :

∴ $\left((ص)^{\frac{ص}{٦}}\right)^{٦} = ٦^{٦}$

∴ $ص^{ص} = ٦^{٦}$

ومنها ص = ٦

وحيث أن $س = \sqrt[٦]{ص}$

∴ $س = \sqrt[٦]{٦} = ٦^{\frac{١}{٦}}$

وكذلك إذا كانت $س^{س^{٩}} = ٩$ فإن $س = (٩)^{\frac{١}{٩}}$

، وكذلك إذا كانت $(س)^{س^{٧}} = ٧$ فإن $س = (٧)^{\frac{١}{٧}}$

وذلك بمجرد النظر ..

◀ بمجرد النظر :

أوجد قيمة س فى المقدار الآتى بمجرد النظر : $س^{س^{٤}} = ٤$

◄ **الحــل :**

نضع $س^{٤} = ص$

∴ $س = \sqrt[٤]{ص}$

المقدار يمكن كتابته كالتالى : $\left[(\sqrt[٤]{ص})^{(\sqrt[٤]{ص})^{٤}} \right] = ٤$

∴ $(ص^{\frac{١}{٤}})^{(ص^{\frac{١}{٤}})^{٤}} = ٤$

∴ $(ص^{\frac{١}{٤}})^{ص} = ٤$

∴ $ص^{\frac{ص}{٤}} = ٤$

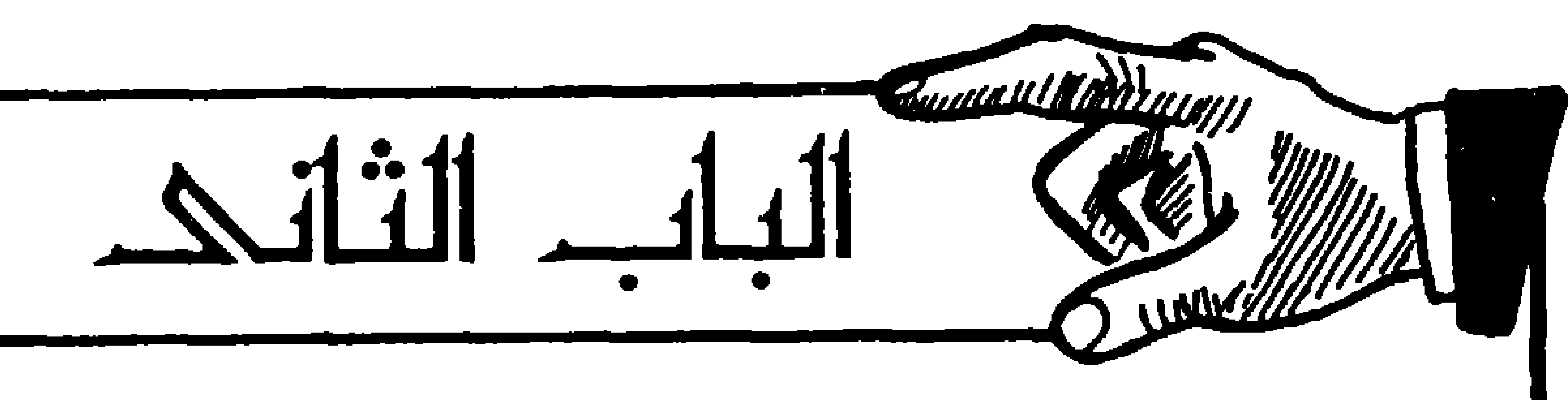
وبرفع كلا الطرفين للقوة الرابعة :

∴ $(ص^{\frac{ص}{٤}})^{٤} = ٤^{٤}$

∴ $ص^{ص} = ٤^{٤}$

ومنها ص = ٤

∴ $س = \sqrt[٤]{ص} = \sqrt[٤]{٤} = ٤^{\frac{١}{٤}} = (٢^{٢})^{\frac{١}{٤}} = ٢^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}$



عمليات مفيدة مع الأرقام



◄ عمليات الضرب السريعة :

تقتضى الظروف أحياناً إجراء عمليات ضرب الأرقام وبدون استعمال آلات حاسبة وتفيد الرياضيات كثيراً فى هذا .

فمثلاً إذا أردنا إيجاد :

$(٠,٩٩)^٢$ أ، $(٢٨)^٢$ أ، $٥٣^٢$ أ، $٩٧^٢$ مثلاً

فإننا نقول :

نعتبر $ا^٢ = (ا^٢ - ب^٢) + ب^٢$

$= (ا - ب)(ا + ب) + ب^٢$

وعلى هذا فإن :

$$(٠,٩٩)^٢ = (٠,٩٩ - ٠,٠١)(٠,٩٩ + ٠,٠١) + ٠,٠١^٢$$

$$= ٠,٩٨ \times ١ + ٠,٠١^٢$$

$$= ٠,٩٨٠٠ + ٠,٠٠٠١ = ٠,٩٨٠١$$

، $٢٨^٢ = (٢٨ - ٢)(٢٨ + ٢) + (٢)^٢$

$$= ٢٦ \times ٣٠ + ٤$$

$$= ٧٨٠ + ٤ = ٧٨٤$$

، $٥٣^٢ = (٥٣ - ٣)(٥٣ + ٣) + ٩$

$$= ٥٠ \times ٥٦ + ٩$$

$$= ٢٨٠٠ + ٩ = ٢٨٠٩$$

، $٩٧^٢ = (٩٧ - ٣)(٩٧ + ٣) + ٩$

$$= ٩٤٠٠ + ٩ = ٩٤٠٩$$

، $٣٨^٢ = ٤٠ \times ٣٦ + ٢^٢ = ١٤٤٤$

، $١٩^٢ = ٢٠ \times ١٨ + ١^٢ = ٣٦١$

، $٦٣^٢ = ٦٦ \times ٦٠ + ٣^٢ = ٣٩٦٩$

، $٢٧^٢ = ٣٠ \times ٢٤ + ٣^٢ = ٧٢٩$ ، وهكذا

١ ـ أوجد قيمة ٩٩٣ × ٩٩٨ بطريقة الضرب السريع .

◀ **الحـــل :**

الحل يكون كالتالى :

٩٩٣ × ٩٩٨ = (١٠٠٠ − ٧) (١٠٠٠ − ٢)

= ١٠٠٠ × ١٠٠٠ − ١٠٠٠ × ٧ − ١٠٠٠ × ٢ + ٧ × ٢

= ١٠٠٠ (١٠٠٠ − ٧) − ١٠٠٠ × ٢ + ٧ + ٢

= ١٠٠٠ × ٩٩٣ − ١٠٠٠ × ٢ + ٧ × ٢

= ١٠٠٠ (٩٩٣ − ٢) + ٧ × ٢

= ١٠٠٠ × ٩٩١ + ١٤ = ٩٩١٠١٤

أى أن :

٩٩٣ × ٩٩٨ = (٩٩٣ − ٢) × ١٠٠٠ + ٧ × ٢

= (الرقم الأول − الفرق بين الألف والرقم الثانى) × ١٠٠٠ + فرق الرقم الأول عن الألف مضروباً فى فرق الرقم الثانى عن الألف .

وعليه فإن قيمة ٩٩٥ × ٩٨٧ بالضرب السريع

= (٩٩٥ − ١٣) × ١٠٠٠ + ٥ × ١٣

= ٩٨٢٠٠٠ + ٦٥ = ٩٨٢٠٦٥

، قيمة ٩٨٦ × ٩٩٧ بالضرب السريع

= (٩٨٦ − ٣) × ١٠٠٠ + ١٤ × ٣

= ٩٨٣٠٠٠ + ٤٢ = ٩٨٣٠٤٢ ، وهكذا ..

٢ ـ أوجد قيمة ٩٧ × ٨٩ ، ٨٧ × ٩٣ بطريقة الضرب السريع .

◀ **الحـــل :**

بنفس الطريقة كما سبق :

٩٧ × ٨٩ = (٩٧ − ١١) × ١٠٠ + ٣ × ١١

(الضرب هنا فى ١٠٠ وليس فى ١٠٠٠)

$= ٨٦٠٠ + ٣٣ = ٨٦٣٣$

$٨٧ \times ٩٣ = (٨٧ - ٧) \times ١٠٠ + ١٣ \times ٧$

$= ٨٠٠٠ + ٩١ = ٨٠٩١$

٣ ـ كيف يمكنك ضرب عددين كل منهما من ثلاثة خانات[آحاد وعشرات ومئات] فيهما خانة العشرات واحدة (متساوية) ومجموع خانتى الآحاد فى كليهما = ١٠ وكمثال :

إضرب : ٦٢٤ × ٦٢٦ ، كذلك ٩٨٧ × ٩٨٣

◀ **الحـــل :**

بالنسبة للمطلوب الأول :

رقمى العشرات والمئات واحد وهو (٦٢) ومجموع رقمى الآحاد فى العددين هو ٤ + ٦ = ١٠ ،

وعلى ذلك فإن حل هذه العملية يكون كالتالى :

نضرب العددين المكونين من رقمى العشرات والمئات فى العددين التاليين لهما ، أى ٦٢ فى العدد الذى يليه أى ٦٣ كالآتى :

نضرب ٦٢ × ٦٣ = ٣٩٠٦

ثم نضرب رقمى الآحاد فى العدد الأول فى رقم الآحاد فى العدد الثانى ، أى :

نضرب ٤ × ٦ = ٢٤

فيكون ناتج الضرب النهائى = ٣٩٠٦٢٤

وكذلك فى ٩٨٧ × ٩٨٣

نضرب ٩٨ × ٩٩ = ٩٧٠٢ [٩٩ هو العدد الذى يلى ٩٨]

ثم نضرب ٧ × ٣ = ٢١

∴ ناتج الضرب النهائى = ٩٧٠٢٢١ ، وهكذا

وتفسير هذه الطريقة السهلة نأخذ العددين ٩٨٧ × ٩٨٣ كمثال

∴ $٩٨٧ \times ٩٨٣ = (٩٨٠ + ٧)(٩٨٠ + ٣)$

$= ٩٨٠ \times ٩٨٠ + ٩٨٠ \times ٧ + ٩٨٠ \times ٣ + ٧ \times ٣$

= ٩٨٠ × ٩٨٠ + ٩٨٠ × ١٠ + ٧ × ٣

= ٩٨٠ × ٩٩٠ + ٧ × ٣

= (٩٨ × ٩٩) × ١٠٠ + ٧ × ٣ [٩٩ هو العدد الذى يلى ٩٨]

= ٩٧٠٢٠٠ + ٢١ = ٩٧٠٢٢١

ويمكن إيجاد قيمة ٩٨٧ × ٩٨٣ بطريقة أخرى كالتالى :

٩٨٧ × ٩٨٣ = (٩٨٥ + ٢) (٩٨٥ − ٢)

= ٩٨٥^{٢} − ٢^{٢}

= ٩٧٠٢٢٥ − ٤ = ٩٧٠٢٢١

ولسهولة إيجاد ٩٨٥^{٢} فإننا يجب أن نتعرض لطريقة سريعة لتربيع الأعداد المنتهية برقم ٥ (رقم الآحاد = ٥)

كما فى المسألة التالية .

٤ ـ أوجد قيمة ٩٥^{٢} ، ٧٥^{٢} ، ٦٥^{٢} ، ١٥^{٢}

◀ **الحـــل :**

٩٥^{٢} = ٢٥ + (٩ × ١٠) × ١٠٠ = ٩٠٢٥

، ٧٥^{٢} = ٢٥ + (٧ × ٨) × ١٠٠ = ٥٦٢٥

، ٦٥^{٢} = ٢٥ + (٦ × ٧) × ١٠٠ = ٤٢٢٥

، ١٥^{٢} = ٢٥ + (١ × ٢) × ١٠٠ = ٢٢٥

والطريقة هى : ضرب رقم العشرات فى الرقم الذى يليه مباشرة × ١٠٠ ثم نضيف ٢٥ للمجموع .

وفيما يلى إثبات هذه الطريقة :

أى عدد يتكون من خانتين (آحاد وعشرات) يمكننا وضعه كالتالى :

ا + ب × ١٠ (ا رقم الآحاد ، ب رقم العشرات)

فمثلاً ٩٥ = ٥ + ٩ × ١٠

وبالتربيع : ∴ (ا + ١٠ ب)^{٢} = ا^{٢} + ١٠٠ ب^{٢} + ٢٠ اب

، ∴ أ = ٥ ، ب = ٩

∴ (٥ + ١٠ ب)^{٢} = ٢٥ + ١٠٠ ب + ١٠٠ ب^{٢}

= ٢٥ + ١٠٠ ب (١ + ب)

= ٢٥ + ١٠٠ × ٩ × ١٠

= ٢٥ + رقم العشرات × الرقم الذى يليه × ١٠٠

= ٢٥ + ٩ × ١٠ × ١٠٠

= ٩٠٢٥

ويمكن الاستفادة من الطريقة السابقة فى إيجاد مربع أى عدد من خانة واحدة أو خانتين (آحاد وعشرات) وينتهى بكسر (نصف) كما فى المسألة التالية .

٥ ـ أوجد قيمة المقادير الآتية :

٢٦,٥^{٢} ، ٢٩,٥^{٢} ، ٢١١,٥^{٢} ، ٢١٩,٥^{٢} ، ٢٩٧,٥^{٢}

◀ **الحـــل :**

إذا نظرنا للمسألة السابقة نجد أنه بنفس الفكرة :

٢٦,٥^{٢} = ٠,٥^{٢} + ٦ × ٧ = ٠,٢٥ + ٤٢ = ٤٢,٢٥

، ٢٩,٥^{٢} = ٠,٥^{٢} + ٩ × ١٠ = ٠,٢٥ + ٩٠ = ٩٠,٢٥

، ٢١١,٥^{٢} = ٠,٥^{٢} + ١١ × ١٢ = ٠,٢٥ + ١٣٢ = ١٣٢,٢٥

، ٢١٩,٥^{٢} = ٠,٥^{٢} + ١٩ × ٢٠ = ٠,٢٥ + ٣٨٠ = ٣٨٠,٢٥

، ٢٩٧,٥^{٢} = ٠,٥^{٢} + ٩٧ × ٩٨ = ٠,٢٥ + ٩٥٠٦ = ٩٥٠٦,٢٥

٦ ـ لدينا ثلاث مزارع مزروعة برسيم خاص بتربية البقر والبرسيم المنزرع بنفس الكثافة ونفس معدل النمو ،

الأولى مساحتها ١٠ أفدنة .

والثانية مساحتها ٣٠ فداناً

والثالثة مساحتها ٧٢ فداناً

فإذا كانت مساحة البرسيم المنزرعة بالمزرعة الأولى تكفى لتغذية ٣٦ بقرة لمدة ٤ أسابيع متصلة .

والمزرعة الثانية تكفى لتغذية ٦٣ بقرة لمدة ٩ أسابيع .

والمطلوب هو معرفة كم بقرة يمكنها أن تتغذى على المساحة المنزرعة بالمزرعة الثالثة لمدة ١٨ أسبوع متصلة .

◀ **الحـــل :**

ملاحظة : عندما يأكل البقر البرسيم فإن البرسيم يعود للنمو مرة ثانية ، والآن :

نفرض أن ص = مقدار الزيادة فى كمية البرسيم الناشىء من عودته للنمو فى الفدان الواحد فى الأسبوع الواحد .

وعلى هذا :

ففى الأسبوع الواحد فى المزرعة الأولى ، يزداد نمو البرسيم بمقدار ١٠ ص .

وفى أربعة أسابيع بمقدار = ١٠ ص × ٤ = ٤٠ ص

وهذا لو أننا إعتبرنا أن مساحة المزرعة الأولى إزدادت وأصبحت (١٠ + ٤٠ ص) فدان [أو كمية برسيم]

وفى أسبوع واحد فإن ٣٦ بقرة تستهلك $\frac{١}{٤}$ هذه الكمية أو هذه المساحة وبالتالى فإن بقرة واحدة تستهلك فى الأسبوع الواحد من المزرعة الأولى

$$= \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٣٦} = \frac{١}{١٤٤}$$ من هذه الكمية

أى ما يعادل $\frac{١٠ + ٤٠ ص}{١٤٤}$ فداناً .... (١)

وبنفس الطريقة فإننا نوجد المساحة التي تكفى لتغذية بقرة واحدة خلال أسبوع واحد من المزرعة الثانية كالتالى :

نمو البرسيم فى خلال إسبوع واحد فى الفدان الواحد = ص (نفس المعدل للمزرعة الأولى)

∴ نمو البرسيم فى خلال ٩ أسابيع فى الفدان الواحد = ٩ ص

∴ نمو البرسيم فى خلال ٩ أسابيع فى ٣٠ فدان = ٢٧٠ ص

وبالتالى فإن المساحة الفعلية التى استخدمت فى تغذية ٦٣ بقرة فى خلال ٩ أسابيع = ٣٠ + ٢٧٠ ص

∴ فالمساحة اللازمة لتغذية بقرة واحدة لمدة إسبوع واحد من المزرعة الثانية

$$= \frac{٣٠ + ٢٧٠ ص}{٦٣ \times ٩} \text{ فداناً} \quad \ldots\ldots\ldots (٢)$$

ولكن (١) = (٢)

[باعتبار أن البقرة من هذا النوع تتغذى فى الأسبوع الواحد بكمية ثابتة]

$$∴ \frac{١٠ + ٤٠ ص}{١٤٤} = \frac{٣٠ + ٢٧٠ ص}{٦٣ \times ٩}$$

$$∴ ص = \frac{١}{١٢} \quad \ldots\ldots\ldots (٣)$$

وبالتعويض عن قيمة ص من المعادلة (٣) فى أى من المعادلتين (١) أو (٢) نحصل على كمية البرسيم اللازمة لتغذية بقرة واحدة لمدة أسبوع واحد :

فبالتعويض فى المعادلة (١) :

$$∴ \text{المساحة (الكمية)} = \frac{١٠ + ٤٠ \times \frac{١}{١٢}}{١٤٤}$$

$$= \frac{٥}{٥٤} \text{ فداناً .}$$

وبالنظر للمعادلتين (١) ، (٢) فإنه يمكن تكوين المعادلة (٤) على الوجه التالى :

$$\frac{٥}{٥٤} = \frac{٧٢ + ٧٢ \times ١٨ \times \frac{١}{١٢}}{س \times ١٨}$$

ومنها س = ١٠٨ بقرة .

وهى كمية البقر التى تكفيها مساحة ٧٢ فداناً لمدة ١٨ إسبوعاً للتغذية .

٧ ـ فى أحد سباقات السيارات ، كانت هنالك ثلاث سيارات واحدة منهن سرعتها تقل عن سرعة الأولى ب : ٣٠ كم/ساعة .

وفى نفس الوقت سرعتها تزيد عن الثالثة ب : ٢٠ كم / ساعة

فإذا كانت هذه السيارة تصل إلى نهاية السباق بعد وصول السيارة الأولى بـ $\frac{٣}{٤}$ ساعة (٤٥ دقيقة) وقبل السيارة الثالثة بـ ٣٦ دقيقة .

فإذا كان السباق بدون توقف فالمطلوب حساب الآتى :

١ ـ طول مسافة السباق .

٢ ـ سرعة كل من السيارات الثلاث .

٣ ـ زمن إنهاء السباق لكل من السيارات الثلاث .

◀ الحـــل :

هنا عدد المجاهيل سبعة ، ثلاث سرعات وثلاثة أزمنة ومسافة واحدة ، إلا أننا سنتبع طريقة سهلة للحصول على هذه المجاهيل

لنفرض أن سرعة السيارة الثانية = س كم/ساعة .

∴ سرعة السيارة الأولى = (س + ٣٠) كم/ساعة

، سرعة السيارة الثالثة = (س − ٢٠) كم/ساعة

ولنفرض أن طوال مسافة السباق = ف كيلو متر

∴ زمن إنهاء السباق للسيارة الأولى = $\frac{ف}{(س + ٣٠)}$ ساعة

، زمن إنهاء السباق للسيارة الثانية = $\frac{ف}{س}$ ساعة

، زمن إنهاء السباق للسيارة الثالثة = $\frac{ف}{(س - ٢٠)}$ ساعة

ولما كانت السيارة الثانية تأخذ من الوقت أكثر من السيارة الأولى بمقدار $\frac{٣}{٤}$ ساعة ، لإنهاء السباق ،

∴ $\frac{ف}{س} - \frac{ف}{س + ٣٠} = ٠,٧٥$ ساعة .... (١)

وكذلك فإن السيارة الثانية تأخذ من الوقت أقل من السيارة الثالثة بمقدار ٣٦ دقيقة

(أى $\frac{٣٦}{٦٠}$ = ٠,٦٠ ساعة) لإنهاء السباق :

∴ $\frac{ف}{س-٢٠}$ − $\frac{ف}{س}$ = ٠,٦٠ ساعة .... (٢)

من المعادلة (١) وبعد عدة اختصارات نصل إلى أن :

ف = ٠,٠٢٥ س (س + ٣٠) .... (٣)

وبالتعويض عن قيمة ف من المعادلة (٣) فى المعادلة (٢) وبعد العديد من الإختصارات نحصل على قيمة س .

س = ٢٧٠ كيلومتر/ساعة وهى سرعة السيارة الثانية .

∴ سرعة السيارة الأولى = ٢٧٠ + ٣٠ = ٣٠٠ كم/ساعة

، سرعة السيارة الثالثة = ٢٧٠ − ٢٠ = ٢٥٠ كم/ساعة

وبالتعويض عن قيمة س فى المعادلة (٣) :

∴ ف = $\frac{٢٥}{١٠٠٠}$ × ٢٧٠ (٢٧٠ + ٣٠)

= ٢٠٢٥ كيلومتراً وهى مسافة السباق .

، زمن السباق للسيارة الأولى = $\frac{٢٠٢٥}{٣٠٠}$ = ٦,٧٥ ساعة

أى ٦ ساعات ، ٤٥ دقيقة .

، زمن السباق للسيارة الثانية = $\frac{٢٠٢٥}{٢٧٠}$ = ٧,٥ ساعة

أى ٧ ساعات ، ٣٠ دقيقة .

، زمن السباق للسيارة الثالثة = $\frac{٢٠٢٥}{٢٥٠}$ = ٨,١ ساعة

أى ٨ ساعات ، ٦ دقائق .

٨ ـ ما هو أكبر رقم يمكن تكوينه من ٤ آحاد (أربع واحدات أى ١ ، ١ ، ١ ، ١) .

◀ **الحـــل :**

الإجابات المحتملة هى : ١ × ١١١ أ، ١١ × ١١ أ، ١١١١

وأكبرها بلا شك هو ١١١١ ولكننا نجد أن لدينا باستعمال الأسس $(١١)^{١١} = ٢٨٥٣١١ \times ١٠^{٦}$ أى ما يقرب من ٢٨٥ مليار ، ٣١١ مليوناً

ونلاحظ أن الإجابة هنا تزيد عن (١١١١) بمقدار يعادل تقريباً ٢٥٧ مليون مرة .

---

٩ ـ ما هو أكبر رقم يمكن تكوينه من ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٢ (أى أربع إثنانات) .

◀ **الحـــل :**

الإجابات المحتملة هى :

٢٢ + ٢٢ ، ٢ × ٢٢٢ ، ٢٢ × ٢٢ ، ٢٢٢٢ ، $(٢٢٢)^{٢}$ ، $(٢٢)^{٢٢}$ ،
$(٢)^{٢٢٢}$ ، $[(٢٢)^{٢}]^{٢}$ ، $[٢^{٢٢}]^{٢}$ ، $[(٢)^{٢}]^{٢٢}$ ، $([(٢)^{٢}]^{٢})^{٢}$

وهى إحدى عشرة إجابة محتملة ويلاحظ أن الإجابات الأربع الأول ذات قيم صغيرة جداً ولا تقارن بالإجابات الباقية .

، $(٢٢٢)^{٢} = ٤٩٢٨٤$

، $(٢٢)^{٢٢} \cong ٣,٤١٤٢٧ \times ١٠^{٢٩}$

، $(٢)^{٢٢٢} \cong ٦,٧٣٩٩٨ \times ١٠^{٦٦}$

، $[(٢٢)^{٢}]^{٢} \cong ٢٣٤٢٥٦$.

، $[(٢)^{٢٢}]^{٢} \cong {}^{٤٨٤٢}$ = عدد لا نهائى يصعب حصره

، $[(٢)^{٢}]^{٢٢} \cong (٢)^{٤١٩٤٣٠٤}$ = عدد لانهائى يصعب حصره أكبر من السابق

، $(((٢)^{٢})^{٢})^{٢} \cong ٦٥٥٣٦$ تقريباً .

وواضح من التحليل السابق أن أكبر الإجابات قاطبة هى $[(٢)^{٢}]^{٢٢}$ وهو يعادل تقريبا ٢ مرفوعة لأس مقداره يزيد عن ٤ مليون وهو يزيد عن ناتج $(١٠)^{١,٢٦٢,٦١١}$ أى يزيد عن عشرة وأمامها ما يزيد عن مليون ومائتين إثنان وستون صفراً وهو رقم خراف بالطبع [لاحظ أن ٢٢٢ أكبر من $٢٢^{٢}$]

١٠ ـ ما هو أكبر رقم يمكن تكوينه من ثلاث إثنانات (٢ ، ٢ ، ٢) ، ثلاث ثلاثات .

◀ ***الحـــل :***

الإجابات المحتملة هى :

$٢ + ٢٢$ ، ٢×٢٢ ، $(٢٢)^{٢}$ ، $[(٢)^{٢}]^{٢}$ ، $[٢]^{٢٢}$ ، $(٢ \times ٢)^{٢}$

المقدار الثالث : $(٢٢)^{٢} = ٤٨٤$

المقدار الرابع : $[(٢)^{٢}]^{٢} = ٢^{٤} = ١٦$

المقدار الخامس : $[٢]^{٢٢} = ٤١٩٤٣٠٤$ وهو أكبرها قاطبة وكذلك فى حالة الرقم ٣

فإن أكبر الأرقام الممكن الحصول عليها من ثلاث ثلاثات .

هو $٣^{٣٣} \cong ٥,٥٦ \times ١٠^{١٥}$

١١ ـ ما هو أكبر رقم يمكن تكوينه من ثلاث أربعات (٤ ، ٤ ، ٤)

◀ ***الحـــل :***

فى حالة الرقم ٤ فإن الإجابة ليست كحالة الرقم ٢ والرقم ٣

أى أنها ليست $٤^{٤٤} = ٣,٠٩٤٨٥ \times ١٠^{٢٦}$

ولكن الإجابة هى $[(٤)^{٤}]^{٤} = (٤)^{٢٥٦}$

وهو رقم خراف يصعب تصوره وعلى هذا ففى حالة العددين ٢ ، ٣ فإنه توجد الطريقة السابق بيانها لاستنتاج أكبر رقم ممكن ، بينما فى حالة العدد ٤ فما فوق فإنه توجد طرق أخرى .

١٢ ـ ما هو أكبر رقم يمكن تكوينه من ثلاث سبعات (٧ ، ٧ ، ٧) .

◀ **الحــل :**

الإجابات المحتملة هى: (٧×٧×٧) ، $(٧ \times ٧)^{٧}$ ، $(٧٧)^{٧}$ ، $(٧)^{٧٧}$ ، $[(٧)^{٧}]^{٧}$.

المقدار الثانى : $(٧ \times ٧)^{٧} = (٤٩)^{٧} \cong ٦,٧٨ \times ١٠^{١١}$

المقدار الثالث : $(٧٧)^{٧} \cong ١,٦٠٤ \times ١٠^{١٣}$

المقدار الرابع : $(٧)^{٧٧} \cong ١,١٨١ \times ١٠^{٦٥}$

المقدار الخامس : $[(٧)^{٧}]^{٧} = [(٧)^{٨٢٣٥٤٣}]$ = رقم خرافى يصعب حصره وهو عبارة عن ٧ مرفوعة لأس يعادل ما يزيد عن ثمانمائة ألف وذلك لأن $(٧)^{٧}$ فقط = ٨٢٣٥٤٣

وعليك أن تتصور رقم ٧ مرفوع لهذا الأس .

أو هو يعادل ٧ مضروبة فى نفسها لما يزيد عن ثمانمائة ألف مرة .

وعلى ما تقدم فإن أكبر رقم يمكن تكوينه من ثلاث أعداد متساوية (من واحد وحتى ٩) يكون فى الصورة :

$[(\text{العدد})^{\text{العدد}}]^{\text{العدد}}$ أى $[(س)^{س}]^{س}$ فيما عدا حالتى العددين ٢ ، ٣ حيث يكون أكبر رقم ممكن تكوينه كما سبق هو $(٢)^{٢٢}$ ، $(٣)^{٣٣}$.

أى [$(\text{العدد})^{\text{العدد} + \text{العدد} \times ١٠}$]

---

١٣ ـ ما هو أكبر الأرقام وكذلك أصغرها التى يمكن تكوينها من ١ ، ٢ ، ٣ .

◀ **الحــل :**

أكبر الأرقام من ١ ، ٢ ، ٣ ، ليس ٣٢١ ولا $(٢١)^{٣}$ ولا $(٣١)^{٢}$ ولا $(١٢)^{٣}$ ولا ١ × ٢ × ٣ ولا ٣١٢

ولكن أكبرها قاطبة هو $٢^{١٣}$

وذلك لأن : $(٢)^{٣١} = ٢,١٤٧٤٨ \times ١٠^{٩}$

بينما $(٣)^{٢١} = ١٠,٤٦٠٣ \times ١٠^{٩}$

ويُلاحظ أن $(٣)^{٢١}$ أكبر من $(٢)^{٣١}$ بمقدار $\cong ٤,٨٧$ مرة تقريباً

بينما أصغر الأرقام من ١ ، ٢ ، ٣ ، ليس ١٢٣

ولا $\frac{١٢}{٣}$ ولا $\frac{١٣}{٢}$ ولا $\sqrt[٢١]{٣}$

فأصغر الأرقام هو $\sqrt[٣١]{٢} = (٢)^{\frac{١}{٣١}} \cong ١,٠٢٢٦$

١٤ ـ اكتب أى عدد من خانتين (آحاد وعشرات) واكتب بجانبه على اليمين نفس العدد ، ثم اطرح من الناتج عشرة أضعافه ثم اقسم الناتج على الرقم ٧ ثم اقسم الناتج على الرقم ١٣ ، تحصل بذلك على الرقم الأصلى .

◀ **الحـــل :**

نفترض أن العدد هو ٧٣ ، رقم الآحاد = ٣ ، رقم العشرات = ٧ فالعدد ٧٣ يمكن كتابته على الصورة :

(س × ١ + ص × ١٠) حيث س = ٣ ، ص = ١٠ فى مثالنا هذا .

فإذا أضفنا نفس العدد على اليمين يصبح العدد هو ٧٣٧٣

أى على الصورة :

س × ١ + ص × ١٠ + س × ١٠٠ + ص × ١٠٠٠

= (١٠١ س + ١٠١٠ ص) .... (١)

، عشرة أضعاف العدد هى ٧٣٠ أى على الصورة :

(س × ١٠ + ص × ١٠٠) .... (٢)

وبطرح (٢) من (١) نحصل على :

(٩١ س + ٩١٠ ص) = ٩١ (س + ١٠ ص)

= ٧ × ١٣ (س + ١٠ ص)

ثم بالقسمة على كل من ٧ ، ١٣ نحصل على (س + ١٠ ص) أى (٣ + ١٠ × ٧) = ٧٣ وهو نفس العدد الأصلى .

(٣ + ١٠ × ٧) = ٧٣ وهو نفس العدد الأصلى .

١٥ ـ اكتب أى عدد من ثلاث خانات (آحاد وعشرات ومئات) ثم اكتب بجانبه على اليمين نفس العدد ، وبدون طرح أى مقدار ، نقسم الناتج على ٧ ثم على ١١ ثم على ١٣ نحصل على نفس العدد الأصلى .

◄ **الحـــل :**

نفرض أن العدد هو ٨٧٦ [الآحاد ٦ ، العشرات ٧ ، المئات ٨] وعلى هذا يمكن كتابة العدد كالتالى :

[س × ١ + ص × ١٠٠ + ع × ١٠٠٠] حيث س = ٦ ، ص = ٧ ، ع = ٨ وعند إضافة نفس العدد على اليمين إلى العدد الأصلى يصبح العدد الجديد هو ٨٧٦٨٧٦

ويمكن كتابة هذا العدد الجديد كالتالى :

[س × ١ + ص × ١٠ + ع × ١٠٠ + س × ١٠٠٠ + ص × ١٠٠٠٠ + ع × ١٠٠٠٠٠]

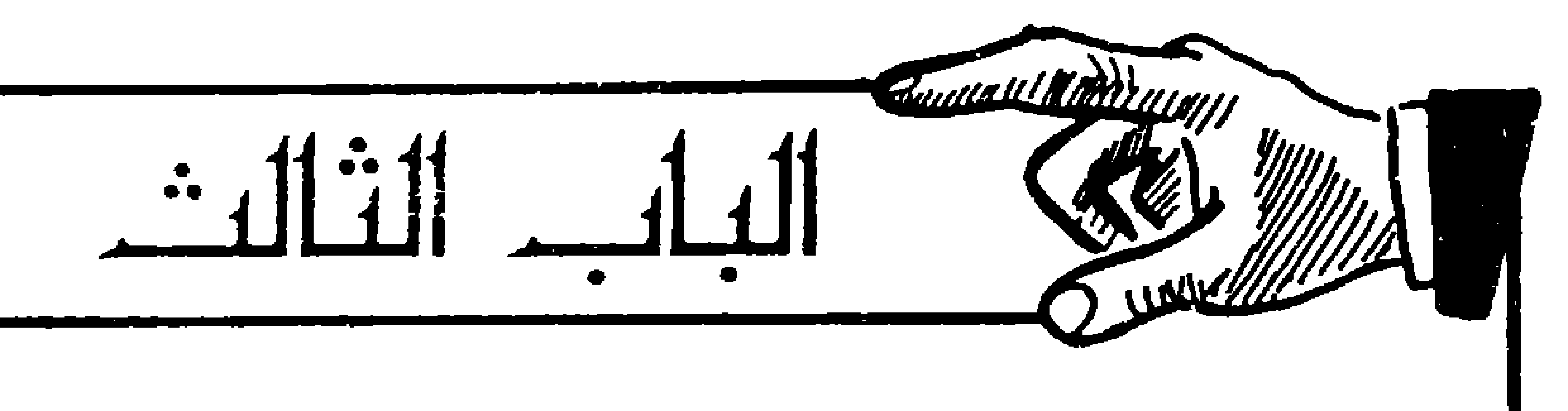
= [١٠٠١ س + ١٠١٠ ص + ١٠٠١٠٠ ع]

= ١٠٠١ [س + ١٠ ص + ١٠٠ ع] = ١٠٠١ × نفس العدد الأصلى

= ٧ × ١١ × ١٣ × نفس العدد الأصلى = ١٠٠١ × ٨٧٦

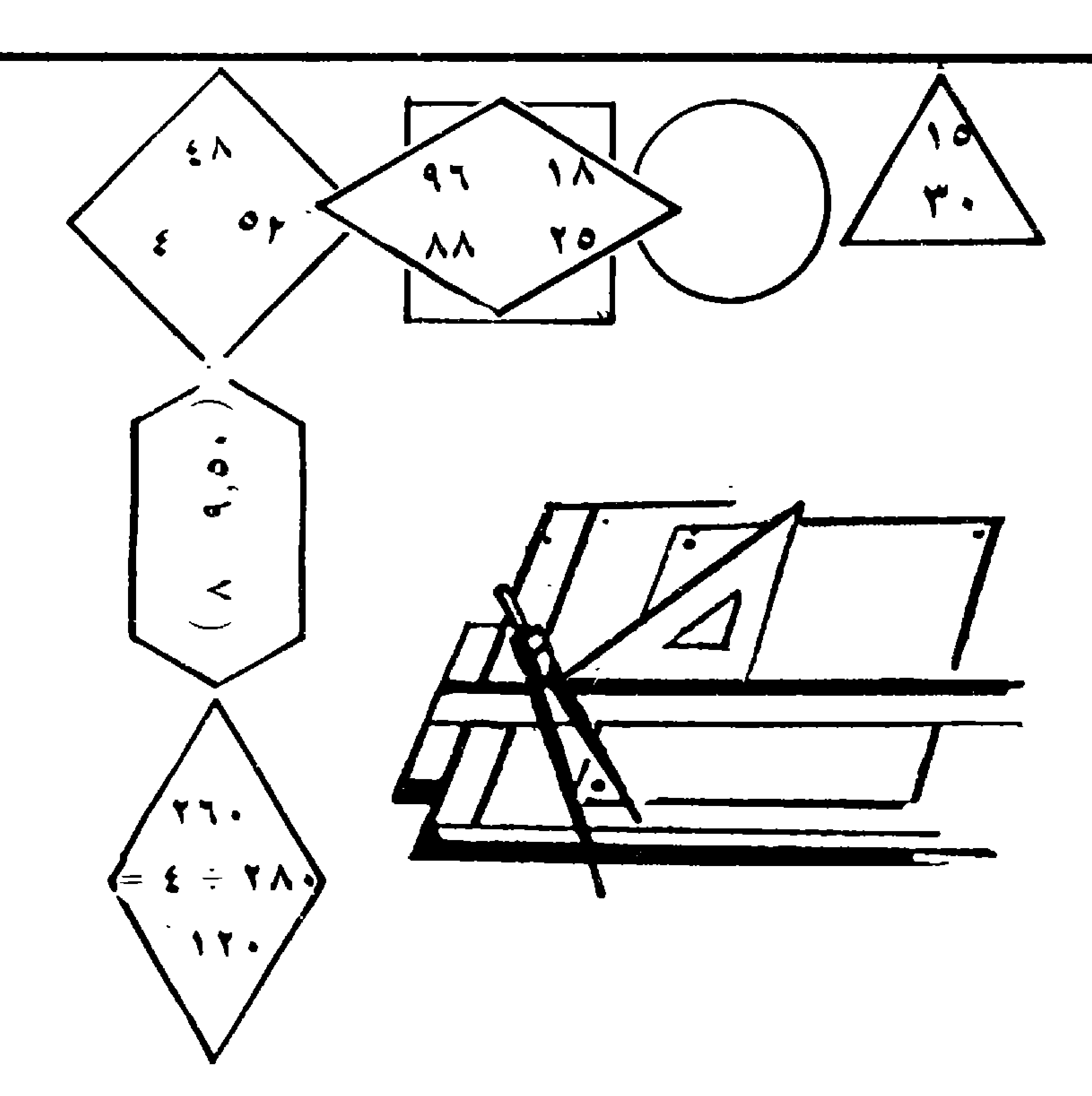
فعند اضافة نفس العدد على يمين العدد الأصلى فاننا نكون كما لو أضفنا ثلاثة أصفار على يمين العدد ثم جمعنا عليه العدد الأصلى .

وباختصار فكأننا ضربنا فى ١٠٠١ ثم قسمنا على ١٠٠١ مرة ثانية



الباب الثالث

المربعات العجيبة





المربعات العجيبة

فيما يلى بعض المربعات العجيبة وهى مبنية على أساس رياضى بحت وسوف نورد فى النهاية القاعدة التى يمكنك بواسطتها عمل عدد لا نهائى من المربعات العجيبة وبمنتهى السهولة .

★ مربع ٣ × ٣ ،

مجموع المربعات :

٣ × ٣ = ٩ (عدد فردى)

إن المجموع = ١٥ فى جميع الاتجاهات

، الأرقام من ١ إلى ٩ بدون تكرار

وتزايدية بمقدار واحد صحيح

٨	٣	٤
١	٥	٩
٦	٧	٢

★ مربع ٥ × ٥ ،

مجموع المربعات :

٥ × ٥ = ٢٥ (عدد فردى)

إن المجموع = ٦٥ فى جميع الاتجاهات

، الأرقام من ١ إلى ٢٥ بدون تكرار

وتزايدية بمقدار واحد صحيح

٢٣	١٠	١٧	٤	١١
٦	١٨	٥	١٢	٢٤
١٩	١	١٣	٢٥	٧
٢	١٤	٢١	٨	٢٠
١٥	٢٢	٩	١٦	٣

★ مربع ٥ × ٥ ،

مجموع المربعات :

٥ × ٥ = ٢٥ (عدد فردى)

والأرقام من : ٤ إلى ٢٨ تزايدية بمقدار واحد صحيح وبدون تكرار والمجموع ٨٠ فى كل الاتجاهات .

٦	١٩	١٢	٢٥	١٨
٢٣	١١	٢٤	١٧	٥
١٠	٢٨	١٦	٤	٢٢
٢٧	١٥	٨	٢١	٩
١٤	٧	٢٠	١٣	٢٦

★ مربع ٧ × ٧ ،

مجموع المربعات = ٧ × ٧ = ٤٩ (عدد فردى)

٢٢	٥	٣٠	١٣	٣٨	٢١	٤٦
٤٧	٢٣	٦	٣١	١٤	٣٩	١٥
١٦	٤٨	٢٤	٧	٣٢	٨	٤٠
٤١	١٧	٤٩	٢٥	١	٣٣	٩
١٠	٤٢	١٨	٤٣	٢٦	٢	٣٤
٣٥	١١	٣٦	١٩	٤٤	٢٧	٣
٤	٢٩	١٢	٣٧	٢٠	٤٥	٢٨

والمجموع = ١٧٥ فى جميع الاتجاهات
الأرقام من ١ إلى ٤٩ بدون تكرار
وتزايدية بمقدار واحد صحيح

★ مربع ٣ × ٣ ،
والمجموع = ١٥٠ فى جميع الاتجاهات
الأرقام من ١٠ إلى ٩٠ بدون تكرار
وتزايدية بمقدار ١٠
(قارن بينه وبين المربع الأول)

٤٠	٣٠	٨٠
٩٠	٥٠	١٠
٢٠	٧٠	٦٠

★ مربع ٣ × ٣ ،
والمجموع = ١٧١ فى جميع الاتجاهات
الأرقام من ١٧ إلى ٩٧ بدوز تكرار .
وتزايدية بمقدار ١٠

٤٧	٣٧	٨٧
٩٧	٥٧	١٧
٢٧	٧٧	٦٧

★ مربع ٥ × ٥ ،
المجموع = ٦٥٠ فى جميع الاتجاهات
من ١٠ إلى ٢٥٠ بدون تكرار
وتزايدية بمقدار ١٠
(قارن بينه وبين المربع الثانى)

٢٣٠	١٠٠	١٧٠	٤٠	١١٠
٦٠	١٨٠	٥٠	١٢٠	٢٤٠
١٩٠	١٠	١٣٠	٢٥٠	٧٠
٢٠	١٤٠	٢١٠	٨٠	٢٠٠
١٥٠	٢٢٠	٩٠	١٦٠	٣٠

★ مربع ٣ × ٣ ،
المجموع = ٢٢,٥ فى جميع الاتجاهات
الأرقام تبدأ من ٣,٥ إلى ١١,٥
وتزايدية بمقدار وحد صحيح ، وبدون
تكرار .

١٠,٥	٥,٥	٦,٥
٣,٥	٧,٥	١١,٥
٨,٥	٩,٥	٤,٥

★ مربع ٣ × ٣ ،
المجموع = ١٣٥,٩ فى جميع الاتجاهات
مجموع المربعات = ٣ × ٣ = ٩ عدد
فردى
الأرقام تبدأ من ٥,٣ إلى ٨٥,٣ وتزايدية
بمقدار ١٠ وبدون تكرار

٧٥,٣	٢٥,٣	٣٥,٣
٥,٣	٤٥,٣	٨٥,٣
٥٥,٣	٦٥,٣	١٥,٣

مربع ٣ × ٣ ، المجموع = ٤٠,٨ فى
جميع الاتجاهات الأرقام تبدأ من ١٢,٨
إلى ١٤,٤ وتزايدية بمقدار ٠,٢ وبدون
تكرار .

١٤,٢	١٣,٢	١٣,٤
١٢,٨	١٣,٦	١٤,٤
١٣,٨	١٤	١٣

★ مربع ٣ × ٣ ،
عدد المربعات = ٩ (عدد فردى)
حاصل ضرب الأرقام فى جميع
الاتجاهات = ٢١٦

١٢	١	١٨
٩	٦	٤
٢	٣٦	٣

★ مربع ٣ × ٣ ،
حاصل ضرب الأرقام فى جميع
الاتجاهات = ٨٠٠٠

١٠	٢٠٠	٤
٨	٢٠	٥٠
١٠٠	٢	٤٠

★ مربع ٤ × ٤ ،
عدد المربعات = ١٦ (عدد زوجى)
حاصل ضرب الأرقام فى جميع
الاتجاهات = ٧٥٦٠

٣٥	٨	٢٧	١
٩	٣	٢٨	١٠
٤	٤٥	٢	٢١
٦	٧	٥	٣٦

★ مربع ٣ × ٣ ،
عدد المربعات = ٩ (عدد فردى)
حاصل ضرب الأرقام فى جميع
الاتجاهات = ٣٣٧٥

٣	٢٥	٤٥
٢٢٥	١٥	١
٥	٩	٧٥

★ مربع سحرى من ١٨ قطعة دومينو
ومجموع النقط فى كل صف وعمود
وقطر = ١٣

٣	٠	١	٢	٤	٣
١	٥	١	١	٠	٥
٠	٠	٣	٣	٦	١
٤	١	٤	٢	٢	٠
٣	١	٢	٣	٠	٤
٢	٦	٢	٢	١	٠

★ مربع سحرى من ١٨ قطعة دومينو ومجموع النقط فى كل صف وعمود وقطر = ١٨

٦	٣	١	٥	٠	٣
٣	١	٦	٢	٢	٤
٣	٣	٤	٣	٥	٠
١	٤	١	٢	٦	٤
٠	٤	٦	٦	٠	٢
٥	٣	٠	٠	٥	٥

★ مربع سحرى من ٤ قطع دومينو ومجموع النقط فى كل ضلع من أضلاعه = ١٠

٤	٤	٢
٣	٠	٤
٣	٣	٤

★ مربع سحرى من ٤ قطع دومينو ومجموع النقط فى كل ضلع من أضلاعه = ١٢

٢	٦	٤
٥	٠	٦
٥	٥	٢

★ مربع سحرى من ٤ قطع دومينو ومجموع النقط فى كل ضلع من أضلاعه = ١٦

٦	٦	٤
٥	٠	٦
٥	٥	٦

★ مربع ٩ × ٩

مجموع المربعات = ٩ × ٩ = ٨١ (عدد فردى)

٧٧	٣٦	٦٧	٢٦	٥٧	١٦	٤٧	٦	٣٧
٢٨	٦٨	٢٧	٥٨	١٧	٤٨	٧	٣٨	٧٨
٦٩	١٩	٥٩	١٨	٤٩	٨	٣٩	٧٩	٢٩
٢٠	٦٠	١٠	٥٠	٩	٤٠	٨٠	٣٠	٧٠
٦١	١١	٥١	١	٤١	٨١	٣١	٧١	٢١
١٢	٥٢	٢	٤٢	٧٣	٣٢	٧٢	٢٢	٦٢
٥٣	٣	٤٣	٧٤	٣٣	٦٤	٢٣	٦٣	١٣
٤	٤٤	٧٥	٣٤	٦٥	٢٤	٥٥	١٤	٥٤
٤٥	٧٦	٣٥	٦٦	٢٥	٥٦	١٥	٤٦	٥

والمجموع = ٣٦٩ فى جميع الاتجاهات

الأرقام من ١ إلى ٨١ بدون تكرار
وتزايدية بمقدار واحدً صحيح

★ مربع ١١ × ١١

مجموع المربعات = ١١ × ١١ = ١٢١ (عدد فردى)

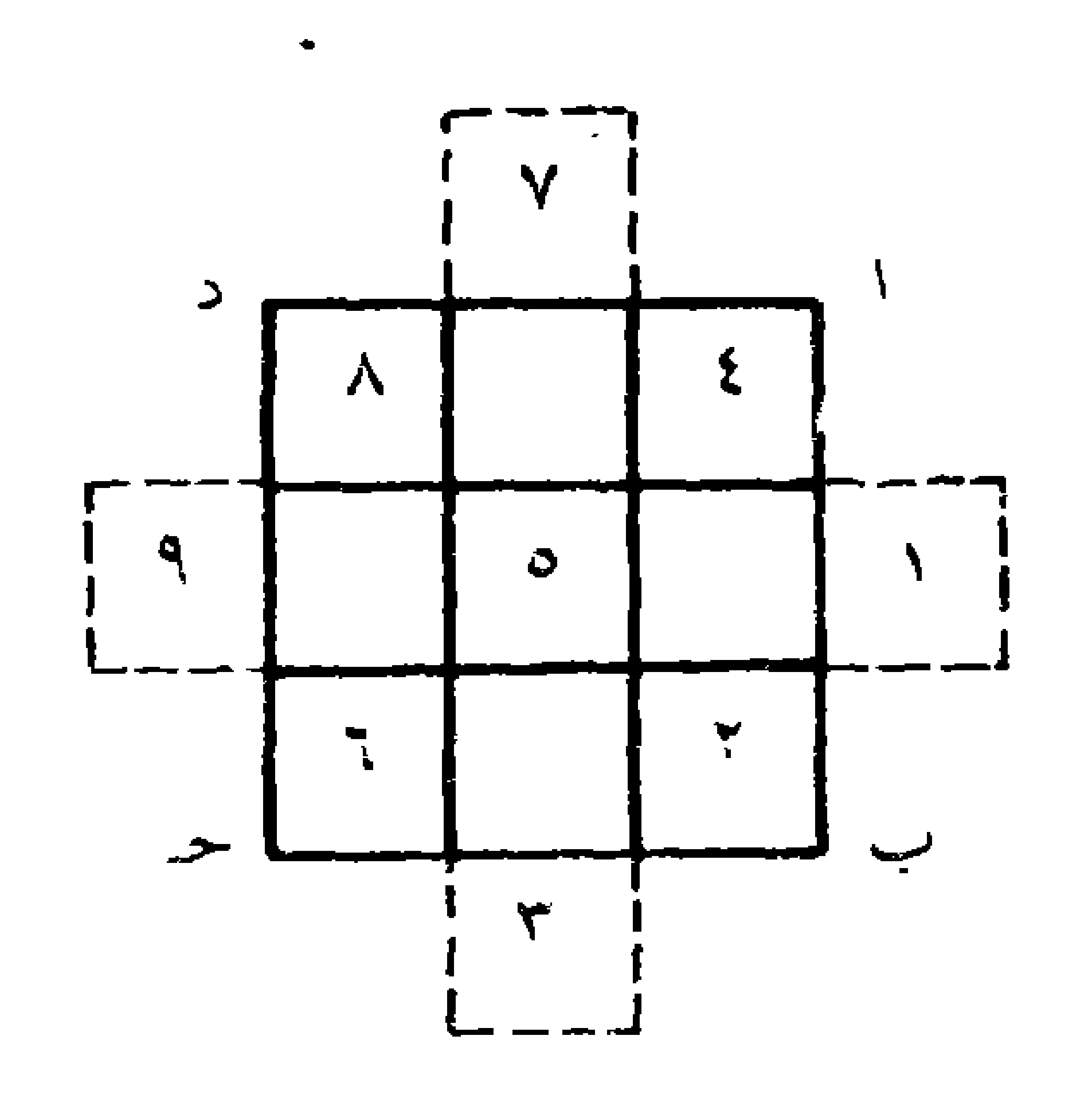
٥٦	٧	٦٨	١٩	٨٠	٣١	٩٢	٤٣	١٠٤	٥٥	١١٦
١١٧	٥٧	٨	٦٩	٢٠	٨١	٣٢	٩٣	٤٤	١٠٥	٤٥
٤٦	١١٨	٥٨	٩	٧٠	٢١	٨٢	٣٣	٩٤	٣٤	١٠٦
١٠٧	٤٧	١١٩	٥٩	١٠	٧١	٢٢	٨٣	٢٣	٩٥	٣٥
٣٦	١٠٨	٤٨	١٢٠	٦٠	١١	٧٢	١٢	٨٤	٢٤	٩٦
٩٧	٣٧	١٠٩	٤٩	١٢١	٦١	١	٧٣	١٣	٨٥	٢٥
٢٦	٩٨	٣٨	١١٠	٥٠	١١١	٦٢	٢	٧٤	١٤	٨٦
٨٧	٢٧	٩٩	٣٩	١٠٠	٥١	١١٢	٦٣	٣	٧٥	١٥
١٦	٨٨	٢٨	٨٩	٤٠	١٠١	٥٢	١١٣	٦٤	٤	٧٦
٧٧	١٧	٧٨	٢٩	٩٠	٤١	١٠٢	٥٣	١١٤	٦٥	٥
٦	٦٧	١٨	٧٩	٣٠	٩١	٤٢	١٠٣	٥٤	١١٥	٦٦

والمجموع = ٦٧١ فى جميع الاتجاهات

الأرقام من ١ إلى ١٢١ بدون تكرار

وتزايدية بمقدار واحد صحيح

◀ شرح طريقة عمل مربع عجيب نظام ٣ × ٣ :



١ ـ يُرسم المربع كالمعتاد ٣ × ٣ (الخطوط المتصلة)

٢ ـ يتم عمل مربعات إضافية بارزة كالمبينة بالشكل (الخطوط المتقطعة) .

٣ ـ أصبح عدد المربعات الآن ١٣ مربعاً (٩ + ٤) ، ويتم استعمال الأربعة الزائدين لكتابة الأرقام بهم

ويُستغنى عن أربعة مربعات فى المقابل من داخل المربع الكبير الأصلى .

ولا يأتى هذا إلا بكتابة الأرقام فى اتجاه مائل (قطرى) كالمبين بالشكل وبتسلسل الأرقام (من ١ إلى ٩) الطبيعى أى [١ ثم ٢ ثم ٣ ثم ٤ ،... ثم ٩] .

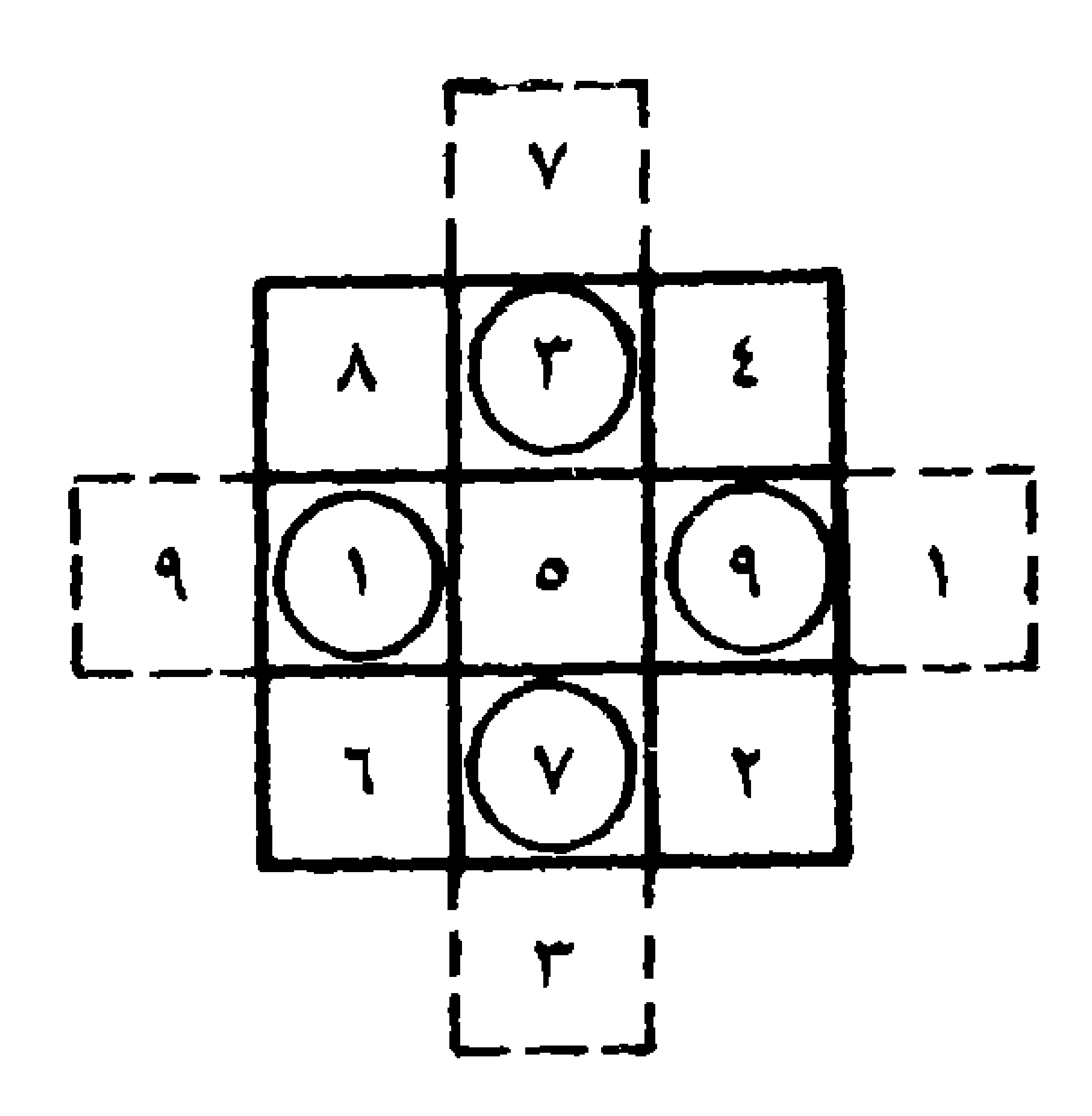
٤ ـ يتم إدخال الأرقام المكتوبة بالمربعات الزائدة إلى داخل المربع الكبير الأصلى (ا ب جـ د) ، حيث ينقل الرقم إلى أحد مربعات صفه (أو عموده) .

ويكون هذا المربع المنقول له الرقم آخر (أبعد) مربع عن الرقم فى المربع الزائد .

وفى مثالنا هذا : ينقل رقم ١ إلى المربع الصغير الموجود فيما بين مربعى ٥ ، ٩ ، بينما ينقل رقم ٩ إلى المربع الصغير المحصور فيما بين مربعى ١ ، ٥ .

وكذلك ينقل رقم ٧ إلى المربع الصغير (على نفس العمود) الموجود فيما بين مربعى ٣ ، ٥ ، بينما ينقل رقم ٣ إلى المربع الصغير الموجود (على نفس العمود) فيما بين مربعى ٥ ، ٧ .

٥ ـ يصبح الشكل النهائى كالآتى :

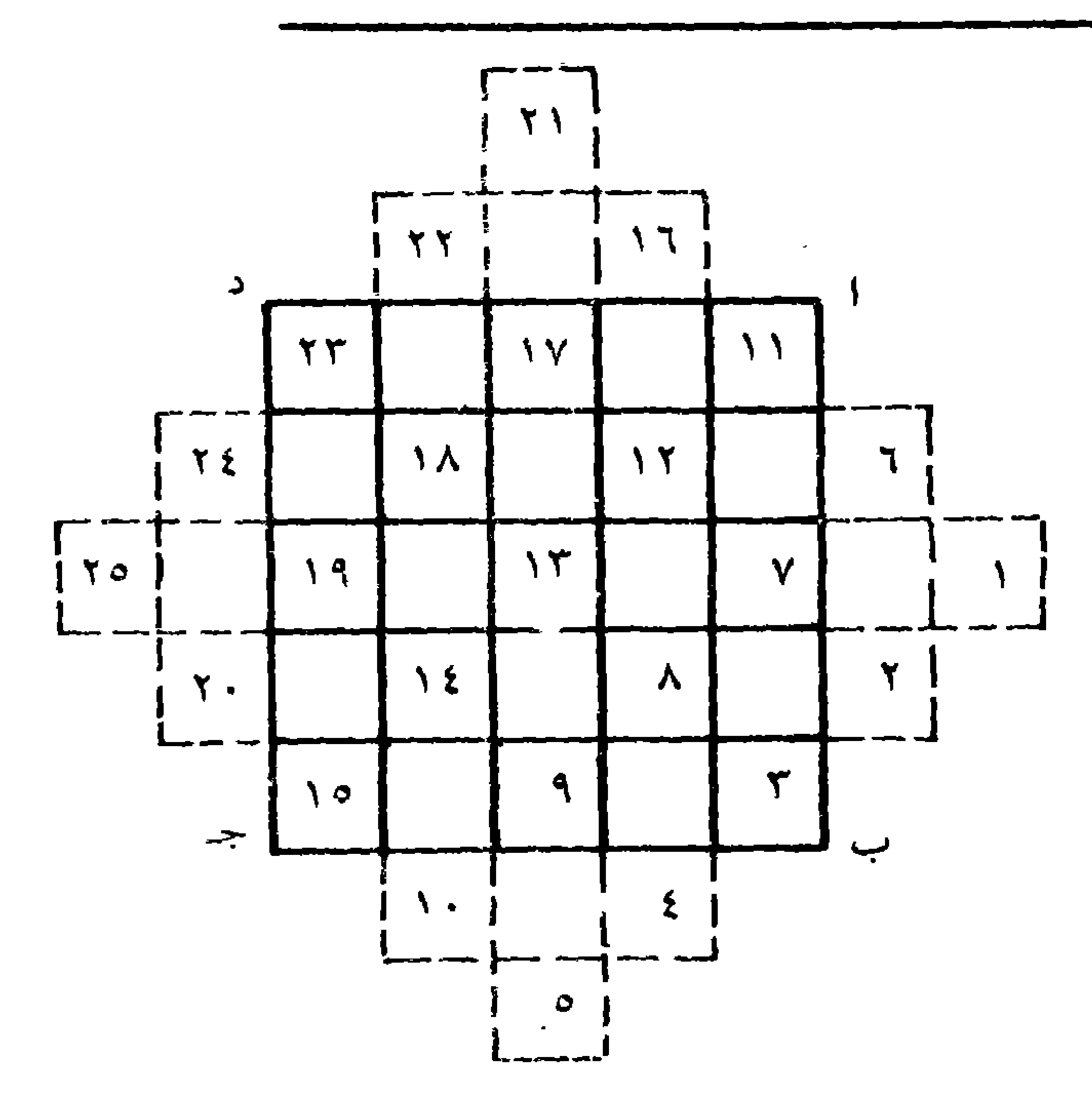


٦ ـ بعد هذا تُلغى المربعات الزائدة وتصبح الأرقام التى بداخل المربع الكبير ا ب جـ د بحيث تحقق :

مجموع الأرقام فى أى صف أو عمود أو قطر = ١٥



◄ شرح طريقة عمل مربع عجيب نظام ٥ × ٥



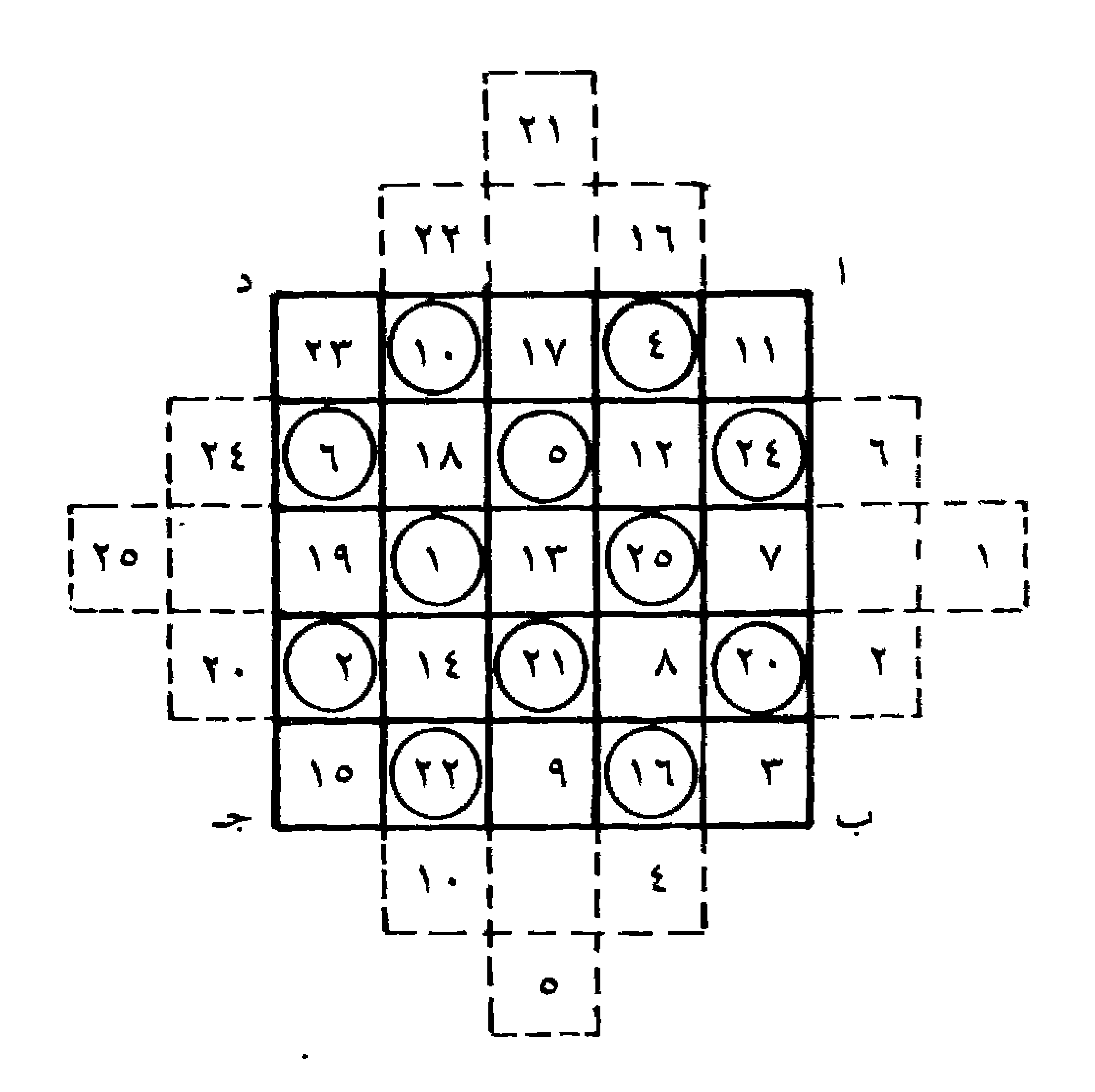
١ ـ يُرسم المربع كالمعتاد ٥ × ٥ (الخطوط المتصلة) ا ب جـ د

٢ ـ يتم إضافة مربعات إضافية بارزة كالمبينة بالشكل (الخطوط المتقطعة) .

٣ ـ أصبح عدد المربعات فى الوضع الجديد = ٤١ مربعاً (٢٥ + ١٦)

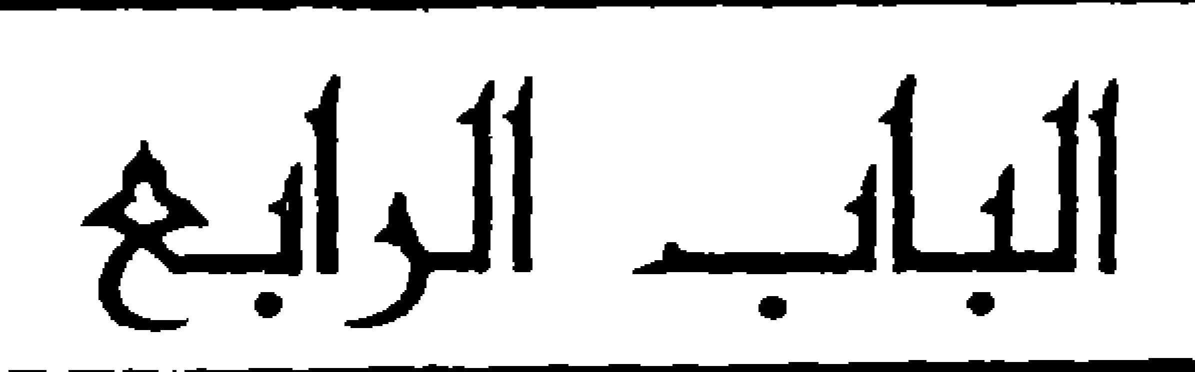
٤ ـ يتم كتابة الأرقام من ١ إلى ٢٥ كالمعتاد وبتسلسل طبيعى وبدون تفكير وفى اتجاه قطرى كالمبين بالشكل .

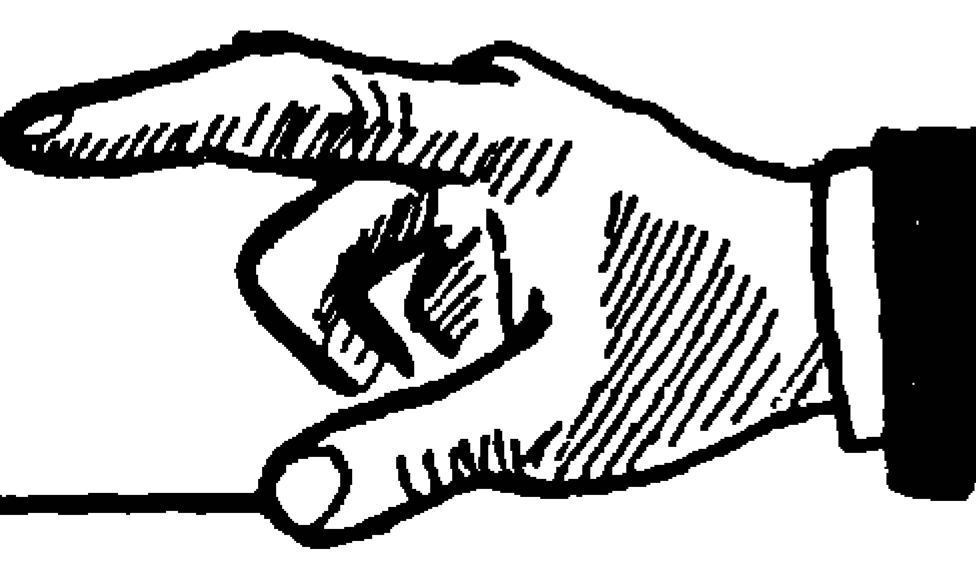
٥ ـ يتم إدخال الأرقام التى كتبت فى المربعات الزائدة إلى داخل المربع الأصلى ا ب جـ د بنفس الطريقة السابقة (٣ × ٣) كما هو مبين بالشكل التالى :



٦ ـ بعد عملية إدخال الأرقام يصبح المربع ا ب جـ د هو المربع العجيب ومجموع الأرقام أفقياً أو رأسياً أو قطرياً = ٦٥

وبنفس الطريقة يمكن عمل أى عدد من المربعات (فردية فقط) .





الباب الرابع

مسائل رياضية متنوعة

١ ـ اشترى رجل بنطلون وقميص وربطة عنق بمبلغ إجمالى = ٦٠ جنيهاً ، فإذا كان ثمن البنطلون أغلى من ثمن القميص بعشرة جنيهات ومجموع ثمن البنطلون والقميص معا يزيد عن ثمن ربطة العنق بأربعين جنيها فكم يبلغ سعر كل منهم . المطلوب هو حل المسألة شفيها بدون أية معادلات

◄ الحـــل :

لما كان سعر البنطلون والقميص يزيد ٤٠ جنيهاً عن ثمن ربطة العنق وسعرهم جميعاً يساوى ٦٠ جنيهاً معنى هذا أن زوج من ربطات العنق سعرها هو الفرق بين ٦٠ ، ٤٠ أى ٢٠ جنيهاً .

وعلى هذا فسعر ربطة العنق الواحدة = $\frac{٢٠}{٢}$ = ١٠ جنيهات

وعليه يصبح ثمن البنطلون والقميص = ٦٠ − ١٠ = ٥٠ جنيهاً ، وحيث أن سعر البنطلون أزيد من سعر القميص بعشرة جنيهات وسعرهما سوياً هو ٥٠ جنيهاً .

∴ ثمن القميص الواحد = $\frac{٤٠}{٢}$ = ٢٠ جنيهاً

∴ ثمن البطلون = ٦٠ − (٢٠ + ١٠) = ٣٠ جنيهاً

∴ الأسعار كالتالى : ٣٠ للبنطلون ، ٢٠ للقميص ، ١٠ لربطة العنق

◄ برهان جبرى :

نفترض أن سعر البنطلون = س ، سعر القميص = ص ، سعر ربطة العنق = ع

∴ (س + ص) + ع = ٦٠ (١)

، (س + ص) − ع = ٤٠ (٢)

وبطرح (٢) من (١) :

∴ ٢ ع = ٢٠ ∴ ع = ١٠ جنيهات .

∴ س + ص = ٦٠ − ١٠ = ٥٠ ...... (٣)

، س − ص = ١٠ ...... (٤)

وبطرح (٤) من (٣) :

∴ ٢ ص = ٤٠ ، ∴ ص = ٢٠ جنيهاً .

∴ س = ٦٠ − ٢٠ − ١٠ = ٣٠ جنيها .

***

٢ ـ يعمل بورش السيارات بإحدى الشركات عاملان ميكانيكيان ، أحدهما أكثر مهارة من الآخر ، حيث يستطيع الميكانيكى الماهر عمل (عمرة) محرك سيارة ما فى يومى عمل كاملين [يوم العمل الكامل = ٨ ساعات عمل] بينما يقوم بنفس العمل وبنفس الدقة العامل الآخر ولكن فى ثلاثة أيام فهل يمكنك معرفة فى أى زمن بالضبط يمكنهما سويا عمل العمرة على أن يُقسم العمل بينهما بغرض تنفيذه فى أقل وقت ممكن .

ملحوظة : يجب الانتهاء من العمل سويا فى نفس الوقت لكل منهما .

◄ الحـــل :

من الواضح أن سرعة أداء الميكانيكى الماهر تزيد عن الميكانيكى الأقل مهارة بنسبة = $\frac{٣}{٢}$ أى مرة ونصف المرة .

وعلى هذا فيجب أن يُسند للميكانيكى الماهر قدرا من العمل يزيد بمرة ونصف المرة عن حجم العمل الذى يُسند إلى الميكانيكى الأقل مهارة وعلى هذا الأساس فقط يمكن لهما أن ينهيا عملهما فى نفس الوقت وعلى هذا يلزم تقسيم العمل لإنهاء (عمرة) محرك واحد بينهما حيث يأخذ الميكانيكى الماهر $\frac{٣}{٥}$ من حجم العمل ، بينما يُسند للآخر $\frac{٢}{٥}$ من حجم العمل فى (العمرة) .

والآن ، علينا أن نحسب الوقت اللازم لإنجاز $\frac{٣}{٥}$ (٠,٦) من حجم العمل بواسطة العامل الماهر وحيث أنه ينجز العمل كله لو كان بمفرده فى يومين

كاملين أى فى ١٦ ساعة ، ففى خلال ١٦ × ٠,٦ = ٩,٦ ساعة يمكنه أن ينجز ٠,٦ من حجم العمل .

وفى هذه الأثناء يكون العامل الآخر قد قام بانجاز ٠,٤ من حجم العمل أيضاً فى ٩,٦ ساعة ، أى فى نفس المدة [٠,٤ × ٣ × ٨] وعليه فانهما يستطيعا إنجاز (عمرة) المحرك سويا فى خلال ٩,٦ ساعة فقط [٣٦ق ٩س] ولكن بمعدلات أداء مختلفة .

◀ **حل ثان :**

فى خلال ستة أيام عمل يستطيع العامل الماهر عمل ثلاث (عمرات) لنفس النوع من المحركات ، وفى خلال ستة أيام يقوم العامل لأقل مهارة بعمل (عمرتين) فقط لهذا النوع من المحركات . وعلى ماتقدم فانه فى خلال ستة أيام يستطيع العاملان عمل خمسة (عمرات) لهذا النوع من المحركات . وهذا يعنى أنه يلزم $\frac{١}{٥}$ الوقت (ستة أيام) لعمل (عمرة) محرك واحد

أى $\frac{١}{٥}$ × ٦ = ١,٢ يوم عمل كامل

أى ١,٢ × ٨ = ٩,٦ ساعة .

٣ ـ سئل رجل عن عمره فإجاب بفزورة مطلوب حلها وهى كالآتى : خذ خمسة أضعاف عمرى بعد خمس سنوات واطرح منها خمسة أضعاف عمرى منذ خمس سنوات فيتبقى لك عدد سنوات عمرى بالضبط فكم عمر الرجل .

◀ **الحـــل :**

نفرض أن عمر الرجل الآن = س

∴ عمره بعد خمس سنوات = س + ٥

∴ عمره قبل خمس سنوات = س − ٥

ومن ثم يمكننا عمل المعادلة الجبرية الآتية وهى من الدرجة الأولى فى س :

٥ (س + ٥) − ٥ (س − ٥) = س

∴ ٥س + ٢٥ − ٥س + ٢٥ = س

ومنها س = ٥٠ سنة . وهو عمر الرجل .

فعمر الرجل بعد خمس سنوات = ٥٥ سنة

عمر الرجل منذ خمس سنوات = ٤٥ سنة

٥ × ٥٥ − ٥ × ٤٥ = ٥٠ سنة

٤ ـ سُئل شاب عن عمره فأجاب بأن ضعف عمره بعد عشر سنين يساوى ٣ أضعاف عمره الآن ، فكم عمره الآن .

◀ **الحـــل :**

لو فرضنا أن عمره الآن = س

يكون عمره بعد عشر سنين = س + ١٠

ويكون ٣ أضعاف عمره الآن = ٣ س

وضعف عمره بعد عشر سنوات = ٢(س + ١٠)

ويمكن تكوين المعادلة البسيطة الآتية :

٢(س + ١٠) = ٣ س

∴ س = ٢٠ عام وهو عمر الشاب الآن .

٥ ـ رجل وزنه ٧٠ كجم يقود دراجته وعليها حمل يعادل ٣٠ كجم فيسير بسرعة تعادل ١٠ كم/ ساعة ، فكم تبلغ سرعته عندما يحمل وزنا قدره ١٠ كجم وبأى سرعة يقود دراجته بدون أحمال باعتباره يبذل نفس الشغل لقيادة دراجته فى جميع الحالات .

◀ **الحـــل :**

من المنطقى أن سرعة الدراجة تتناسب مع الحمل الكلى أى وزن الرجل والحمولة معا وذلك بفرض أنه يبذل نفس الشغل لنفس المسافة وطبيعى أن التناسب هنا عكسى ، بمعنى أن السرعة تقل مع زيادة الوزن ، وواضح أن الرجل يمكنه أن يسير بحمل كبير بسرعة أكبر عما لو كان بحمل صغير إذا كان سيبذل شغلا أكبر إلا أننا سنعتبر أنه يبذل نفس الشغل (المجهود) نظريا لنفس المسافة .

∵ (٧٠ + ٣٠) تتناسب عكسيا مع السرعة (١٠ كم / ساعة)

∴ $١٠٠ \propto \frac{١}{ع}$ ∴ $١٠٠ = \frac{ك}{ع}$ حيث ك ثابت التناسب

∴ $١٠٠ = \frac{ك}{١٠}$ ومنها ك = ١٠٠٠

وعليه ففى الحالة الثانية .

∴ $(٧٠+١٠) = \frac{١٠٠٠}{ع_١}$ [حيث $ع_١$ = سرعته بحمولة ١٠ كجم]

ومنها $ع_١ = \frac{١٠٠٠}{٨٠} \simeq ١٢,٥$ كم / ساعة

وكذلك فى حالة قيادته دراجته بدون حمل :

$٧٠ = \frac{١٠٠٠}{ع_٢}$ ∴ $ع_٢ = \frac{١٠٠٠}{٧٠} \simeq ١٤,٢٩$ كم/ساعة

•——••••——•

٦ ـ يقود محمد دراجته بحيث (يبدل) بمعدل ٧٠ دورة/ق ، فإذا كان قطر عجلته الخلفية = ٥٠ سم وقطر الترس على العجلة الخلفية = نصف قطر الترس الكبير ، فكم تبلغ المسافة التى يسيرها محمد فى الساعة .

◀ **الحـــل :**

فى الدراجة يكون (البدّال) مركبا على الترس الكبير بالأمام ، ولما كان الترس الصغير مركبا على العجلة الخلفية القائدة أى التى تسبب سير الدراجة فإنه لكل لفة من لفات الترس الكبير فإن الترس الصغير يدور لفتين [نسبة

التروس ٢:١] ، وبالتالى تدور العجلة الخلفية دورتين لكل لفة (تبديلة) للترس الأمامى .

وفى كل لفة للعجلة الخلفية فان الدراجة تسير مسافة تعادل محيط العجلة (الخلفية) أى ٢ × ط × نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢٥ سم

∴ فالدراجة تقطع كل دقيقة مسافة = ١٤٠ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢٥ سم

≃ ٢٢٠,٠٠ مترا

∴ المسافة التى يقطعها فى الساعة = ٢٢٠ × ٦٠ = ١٣٢٠٠ متر

أى = ١٣.٢ كم . ١٠ ٪

٧ ـ إشترت فتاة ، فستاناً وشنطة يد وحذاء وجورباً . ودفعت فيهم كلهم مبلغ ١٥٠ جنيهاً ، فإذا كان ثمن الفستان يزيد عن ثمن شنطة اليد بعشرة جنيهات ومجموع ثمنى الفستان وشنطة اليد يزيد عن ثمن الحذاء بمبلغ ٨٠ جنيهاً ، ومجموع أثمان الفستان وشنطة اليد والحذاء يزيد عن ثمن الجورب بمبلغ ١٣٠ جنيهاً .

فهل يمكنك معرفة سعر كل نوع على أن يكون ذلك شفهياً وبدون استخدام أى معادلات .

◀ **الحـــل :**

∴ سعر المشتريات كلها = ١٥٠ جنيهاً .

، فرق سعر الثلاث الأول عن الرابع = ١٣٠ .

∴ فمن الواضح أن الفرق ١٥٠ - ١٣٠ = ٢٠ جنيها يناظر سعر جوربين (زوجين) .

∴ سعر الجورب الواحد = $\frac{٢٠}{٢}$ = ١٠ جنيهات .

و ∴ السعر الإجمالى = ١٥٠ .

∴ سعر الثلاثة لأول = ١٥٠ - ١٠ = ١٤٠ جنيهاً .

وبنفس طريقة الحل المنطقية هذه :

∵ سعر ← الثلاثة الأول = ١٤٠ جنيهاً .

وفرق سعر الفستان والشنطة من الحذاء = ٨٠ جنيهاً .

∴ سعر الحذاء = $\frac{١٤٠ - ٨٠}{٢}$ = ٣٠ جنيهاً .

وعليه يصبح سعر الفستان والشنطة = ١٤٠ - ٣٠ = ١١٠ جنيهاً .

بما أن فرق سعر الفستان عن شنطة اليد = ١٠ جنيهات .

∴ سعر شنطة اليد = $\frac{١١٠ - ١٠}{٢}$ = ٥٠ جنيهاً .

وعلى هذا يكون سعر الفستان مساويا : ١١٠ - ٥٠ = ٦٠ جنيهاً .

أو = ١٥٠ - (٥٠ + ٣٠ + ١٠) = ١٥٠ - ٩٠ = ٦٠ جنيهاً .

∴ الأسعار كالتالى :

٦٠ جنيه للثوب ، ٥٠ جنيه للشنطة ، ٣٠ جنيه للحذاء ، ١٠ جنيهات للجورب ومجموعهم = ١٥٠ جنيهاً .

***

٨ ـ ثلاثة أشخاص مجموع أعمارهم = ٩٠ عاماً .

فإذا كان عمر الأول يزيد عن عمر الثانى بعشر سنوات ، مجموع عمرى الأول والثانى معا يزيد عن عمر الثالث بخمسين عاماً فكم يبلغ عمر كل منهم ، شفهيا وبدون معادلات .

◄ ***الحـــل :***

∵ مجموع أعمار الثلاثة = ٩٠ عاماً .

وفرق عمرى الأول والثانى عن الثالث = ٥٠ عاماً .

وعليه فإن ضعف عمر الثالث = ٩٠ - ٥٠ = ٤٠ عاماً .

∴ عمر الثالث = $\frac{٤٠}{٢}$ = ٢٠ عاماً .

∴ عمرى الأول والثانى = ٩٠ - ٢٠ = ٧٠ عاماً .

وفرق عمر الأول عن الثانى = ١٠ سنوات .

∴ ضعف عمر الثانى = ٧٠ - ١٠ = ٦٠ عاماً .

∴ عمر الثانى = $\frac{٦٠}{٢}$ = ٣٠ عاماً .

∴ عمر الأول = ٧٠ - ٣٠ = ٤٠ عاماً .

أما عمر الأول = ٩٠ - (٣٠ + ٢٠) = ٤٠ عاماً (كذلك)

∴ أعمارهم هى ٤٠ ، ٣٠ ، ٢٠ عاماً على الترتيب .

٩ ـ ثلاثة رجال مجموع أعمارهم = ١٤٠ عاماً ، فإذا كان عمر الأول يزيد عن الثالث ب : ٢٥ عاماً ، وعمر الأول والثالث يزيد عن عمر الثانى ب : ٥٠ عاماً . فكم عمر كل منهم (شفهياً) .

◀ **الحـــل :**

واضح أن ضعف عمر الثانى لابد وأن يساوى أقل من ١٤٠ بمقدار ما أى يساوى : ١٤٠ - ٥٠ = ٩٠ عاماً .

∴ عمر الثانى = $\frac{٩٠}{٢}$ = ٤٥ عاماً .

وعليه فن عمر الأول والثالث = ١٤٠ - ٤٥ = ٩٥ عاماً .

والفرق بين عمر الأول والثالث = ٢٥ عاماً .

∴ ضعف عمر الثالث = ٩٥ - ٢٥ = ٧٠ عاماً .

∴ عمر الثالث = $\frac{٧٠}{٢}$ = ٣٥ عاماً .

∴ عمر الأول = (٩٥ - ٣٥) = ٦٠ عاماً .

أما عمر الأول = ١٤٠ - (٤٥ + ٣٥) = ٦٠ عاماً .

∴ أعمارهم هى ٦٠ ، ٤٥ ، ٣٥ عاما على الترتيب .

١٠ ـ إذا وضعنا ثلاث قطع شطرنج على لوحة الشطرنج ، فهل يمكنك حساب عدد الأوضاع المختلفة للقطع الثلاث على الرقعة .

◀ **الحـــل :**

إذا بدءنا بالقطعة الأولى نجد أنه يمكن وضعها فى أى خانة من الأربعة

وستون وهى عدد خانات رقعة الشطرنج ولكل وضع منها يتبقى ٦٣ مربعاً يمكن أن يوضع بأى مربع منها القطعة الثانية أى أنه لكل وضع من الأربعة وستون وضعاً التى تأخذها القطعة الأولى ، يكون هناك ٦٣ وضعاً للقطعة الثانية فيصبح عدد الأوضاع الممكنة لقطعتين = ٦٤ × ٦٣ = ٤٠٣٢ وضعاً

ثم أنه لكل وضع من الثلاث وستون وضعاً للقطعة الثانية يوجد ٦٢ وضعاً للقطعة الثالثة ، أو بطريقة أخرى :

لكل وضع من الأوضاع البالغ عددها ٤٠٣٢ وضعاً للأولى والثانية يتبقى ٦٢ مربعاً فارغاً للقطعة الثالثة .

وبذلك فإن مجموع الأوضاع الممكنة لثلاث قطع شطرنج على الرقعة : يساوى ٦٤ × ٦٣ × ٦٢ = ٢٤٩٩٨٤

وكما ترى فهو رقم يساوى تقريبا ربع مليون وضع والآن وبنفس الطريقة ، لنرى كم يكون عدد الأوضاع فى حالة وجود ٥ قطع شطرنج

العدد = ٦٤ × ٦٣ × ٦٢ × ٦١ × ٦٠ = ٩١٤٩٤١٤٤٠

وهو رقم يكاد يقترب من مليار وضعاً مختلفاً .

١١ـ بائعتا بيض توجهتا لبيع ما معهم من بيض بسوق القرية ، وكانت الأولى معها ٤٢٠ بيضة وتبيع الـ ٤ بيضات بسعر ٣٠ قرشاً والأخرى معها ٤٢٠ بيضة وتبيع الثلاث بيضات بسعر ٣٠ قرشاً فاتفقتا على أن يجمعا البيض كله (٨٤٠) فى سلة واحدة ويبيعا البيض بسعر ٦٠ قرشاً لكل ٧ بيضيات [٤ + ٣ = ٧ ، ٣٠ + ٣٠ = ٦٠] والمطلوب حساب نصيب كل منهما فى هذه الحالة ، وهل هناك مكسب أم خسارة (لهما سوياً) .

◀ **الحـــل :**

قد يتصور البعض أنه لا يوجد مكسب أو خسارة طبقاً لسياق المسألة إلا أن واقع الأمر يختلف كثيراً كما يتضح من الآتى :

ففى حالة أن كلاً منهن ستبيع بمفردها :

∴ ستحصل الأولـى على مبلغ = ٤٢٠ × $\frac{٣٠}{٤}$ = ٣١٥٠ قرشاً

بينما ستحصل الثانية على مبلغ = ٤٢٠ × $\frac{٣٠}{٣}$ = ٤٢٠٠ قرشاً

ومجموع مايحصلا عليه سوياً فى هذه الحالة = ٣١٥٠ + ٤٢٠٠

= ٧٣٥٠ قرشاً .. ①

وفى حالة البيع الجماعى (سوياً) :

فإن كمية البيض كلها = ٤٢٠ + ٤٢٠ = ٨٤٠ بيضة

ثمن البيع للبيض كله = ٨٤٠ × $\frac{٦٠}{٧}$ = ٧٢٠٠ قرشاً .. ②

فإذا قارنا ① ، ② نجد أنهما عندما تبيعان سويا فسوف تخسران مامقداره : ٧٣٥٠ - ٧٢٠٠ = ١٥٠ قرشاً ولكن كيف نفسر هذه الخسارة ومن يتحملها من البائعتين وكيفية توزيع المبالغ حينئذ .

فى البداية كان سعر بيع البائعة الأولى = $\frac{٣٠}{٤}$ = ٧,٥ قرش كل بيضة

وكان سعر بيع البائعة الثانية = $\frac{٣٠}{٣}$ = ١٠ قروش لكل بيضة

وفى حالة البيع الجماعى فان سعر البيع = $\frac{٦٠}{٧}$ = $\frac{٤}{٧}$ ٨ قرش لكل بيضة

∴ فمن الواضح أن البائعة الأولى تأخذ أكثر فى حالة البيع الجماعى

فهى سوف تحصل على ٤٢٠ × $\frac{٦٠}{٧}$ = ٣٦٠٠ قرشاً

وسوف تكون الزيادة بالنسبة لها = ٣٦٠٠ - ٣١٥٠ = ٤٥٠ قرشاً .

بينما البائعة الثانية فسوف تحصل على : ٤٢٠ × $\frac{٦٠}{٧}$ = ٣٦٠٠ قرشا

وبذلك فهى سوف تخسر : ٤٢٠٠ - ٣٦٠٠ = ٦٠٠ قرشاً .

ومبلغ الـ ٦٠٠ قرشاً التى خسرتها البائعة الثانية عبارة عن : ٤٥٠ قرشاً أخذتها الأولى كمكسب زائد ، بالإضافة إلى ١٥٠ قرشاً (الخسارة الكلية) وسنجد أن متوسط سعر البيضة فى الحالة الأولى (البيع منفرداً)

$$= \frac{\frac{٣٠}{٤} + \frac{٣٠}{٣}}{٢} = \frac{٣}{٤}\ ٨$$ قرش للبيضة .

وفى حالة البيع الجماعى فإن سعر البيضة فى المتوسط =

$\frac{٦٠}{٧}$ = $\frac{٤}{٧}$ ٨ قرش / للبيضة

وعليه فإن سعر البيع فى حالة البيع الجماعى يقل بمقدار :

($\frac{٣}{٤}$ ٨ − $\frac{٤}{٧}$ ٨) قرش / للبيضة = $\frac{٥}{٢٨}$ قرشاً للبيضة

١٥٠ قرشاً = $\frac{٥}{٢٨}$ × (٤٢٠ + ٤٢٠) = $\frac{٥}{٢٨}$ × ٨٤٠ = ١٥٠ قرشاً.

١٢ ـ أطلق قمر صناعى على إرتفاع ٢٠٠ كم من سطح الأرض فكم تكون المساحة التى يمكن تصويرها من سطح الكرة الأرضية بواسطة أجهزة القمر الخاصة بالتصوير (فى أى لحظة) علما بأن نصف قطر الكرة الأرضية = ٦٣٠٠ كيلو متر ، وكم تبلغ نسبة المساحة المصورة بالنسبة لمساحة سطح الكرة الأرضية.

◀ **الحـــل :**

من هندسة الشكل ، الزاوية ا ب م قائمة المسافة م حـ = س

المسافة حـ د = ع ،

إرتفاع القمر من مركز الأرض = ٦٣٠٠ + ٢٠٠ = ٦٥٠٠ كم

$$\therefore \overline{ب م}^{2} = م ح \times م ا$$

$$\therefore (٦٣٠٠)^{2} = س \times ٦٥٠٠$$

$$\therefore س = \frac{٦٣٠٠ \times ٦٣٠٠}{٦٥٠٠} = ٦١٠٦$$ كيلو متر تقريباً .

$$\therefore ع = م د - م ح = ٦٣٠٠ - ٦١٠٦ = ١٩٤$$ كيلو متر تقريباً .

والمساحة التى يمكن لكاميرات تصوير القمر الصناعى تصويرها من سطح الكرة الأرضية عبارة عن طاقية كروية (تقريبا) من سطح الكرة الأرضية ، إرتفاعها = ع = ١٩٤ ولما كانت مساحة الطاقية = ٢ ط نق ع

$\therefore$ المساحة الممكن تصويرها = ٢ ط × ٦٣٠٠ × ١٩٤

= ٧٦٧٩٣٠٩

≃ = ٧٦٨٠٠٠٠

أى سبعة مليون ، ٦٨٠ ألف كيلو متر مربع تقريبا وهى تعادل حوالى سبعة أضعاف مساحة جمهورية مصر العربية ولما كانت مساحة سطح الكرة الأرضية = $٤ (٦٣٠٠)^{2}$ ط ≃ ٤٩٨٧٥٩٠٠٠ كم^{2}

أى حوالى ٥٠٠ مليون كيلو متر مربع .

$\therefore$ نسبة المساحة المصورة = $\frac{٧٦٧٩٣٠٩}{٤٩٨٧٥٩٠٠٠}$ ≃ ٠,٠١٥٤

أى حوالى ١,٥٤٪ من مساحة سطح الكرة الأرضية .

١٣ـ على أى إرتفاع يجب وضع قمر صناعى فى مدار حول الأرض لكى يمكنه تغطيته ($\frac{١}{١٠}$) من مساحة سطح الكرة الأرضية للإرسال الإذاعى والتليفزيونى (فى أى لحظة) ، نصف قطر الكرة الأرضية = ٦٣٠٠ كيلو متر تقريباً .

◀ **الحـــل :**

مساحة سطح الكرة الأرضية كما رأينا فى المسألة السابقة = ٤٩٨,٧٥٩,٠٠٠ كم^{2}

$\therefore$ $\frac{١}{١٠}$ من هذه المساحة = ٤٩,٨٧٥,٩٠٠ = مساحة طاقية كروية مجهول إرتفاعها وبالرجوع للرسم بالمسألة السابقة يكون المجهول هو المسافة (م ا) أى إرتفاع القمر عن مركز الكرة الأرضية .

∴ ٤٩,٨٧٥,٩٠٠ = ٢ ط × ٦٣٠٠ ع ع

∴ ع = ١٢٦٠ كيلو متراً .

∴ المسافة م حـ = س = ٦٣٠٠ − ١٢٦٠ = ٥٠٤٠ كم .

$\overline{\text{ب م}}^{2}$ = م حـ × م ا .

∴ ٦٣٠٠² = ٥٠٤٠ × م ا .

∴ م ا = ٧٨٧٥ كم .

∴ ا د وهو إرتفاع القمر = ٧٨٧٥ − ٦٣٠٠

= ١٥٧٥ كيلو متراً من سطح الأرض .

١٤ــ فى إحدى الحقائب المخصصة لرجال الأعمال كان القفل ذو الأرقام لهذه الحقيبة يتكون من أربعة بكرات ومُدَرج على محيط كل بركة منها عشرة أرقام من صفر وحتى رقم ٩ ، فإذا كانت الحقيبة مغلقة ونسى صاحبها الرقم السرى الذى تنفتح به الحقيبة . فهل لك أن تدلنا ، كم محاولة منك ، يمكنك عملها لفتح هذ القفل وبإعتبار أن كل محاولة ستستغرق منك ٣ ثوان فقط . وهل بإمكانك فتحها خلال نصف ساعة ومانسبة الإحتمال لفتحها حينئذ ؟

◄ **الحــل :**

علينا أولاً أن نحسب العدد الكلى من تراكيب الأرقام التى يمكن تكوينها فى هذه الحالة ، فكل رقم من العشرة أرقام الموجودة على البكرة الأولى (من اليسار) ، يأتى معه أياً من العشرة أرقام الموجودة على البكرة الثانية ، وهذا يعطينا عدد من تراكيب الأرقام بالنسبة للبكرتين الأولى والثانية =

= ١٠ × ١٠ = ١٠٠ رقم

ولكل رقم من المائة رقم هذه يمكننا أن نركب معها رقم من الأرقام العشرة الموجودة على البكرة الثالثة .

وعلى هذا فعدد تراكيب الأرقام المحتملة للثلاث بكرات (الأولى والثانية والثالثة من اليسار) = ١٠٠ × ١٠ = ١٠٠٠ رقم

ومن هنا نصل إلى أن عدد التراكيب التى يمكن تكوينها من أرقام الأربعة بكرات الأولى = ١٠٠٠ × ١٠ = ١٠٠٠٠ أى عشرة آلاف رقم.

ولما كان تركيب كل عدد من العشرة آلاف هذه [كل عدد يتكون من ٤ خانات آحاد وعشرات ومئات وألوف] يستغرق زمناً قدره ٣ ثوان .

∴ فالأمر يحتاج إلى : ١٠٠٠٠ × ٣ = ٣٠٠٠٠ ثانية

أى : $\frac{٣٠٠٠٠}{٦٠ \times ٦٠}$ = ٢٠ ق ٨ ساعة أى حوالى يوم عمل كامل

وعلى هذا فاحتمال فتحها فى خلال نصف ساعة :

= ٣٠ ق ÷ ٢٠ ق ٨ س = ٦٪

وطبعاً هذا لا يمنع من احتمال فتحها من أول محاولة أو بعد عشر محاولات مثلاً وليس شرطاً بعد انقضاء عشرة آلاف محاولة .

•——••••——•

١٥ـ أوصى رجل على فراش الموت بأن توزع ثروته بعد وفاته على أبنائه الأربعة ، بترتيب تنازلى ، أى الأكبر له نصيب أكثر والأصغر له أقل وهكذا ، ويعطى ما يتبقى للمربية والخدم ،

وكانت وصيته كالآتى :

الأول يأخذ نصف ثروة والده + ١ جنيه

والثانى يأخذ نصف ما يتبقى + ١ جنيه

والثالث يأخذ نصف ما يتبقى + ١ جنيه

والرابع يأخذ نصف ما يتبقى + ١ جنيه

ويُوزع الباق والبالغ ٣٠٠٠ على المربية والخدم .

فكم كانت ثروة الوالد وما نصيب كل من الأبناء الأربعة .

◄ **الحـــل :**

نفرض أن مقدار الثروة = س جنيهاً

∴ نصيب الابن الأكبر = $\frac{س}{٢}$ + ١ = $\frac{س + ٢}{٢}$ جنيهاً .... (١)

، نصيب الابن الثانى = $\frac{١}{٢}$ [س − $\frac{س + ٢}{٢}$] + ١

$$= \frac{١}{٢}\left[\frac{س - ٢}{٢}\right] + ١ = \frac{س - ٢}{٤} + \frac{٤}{٤} = \frac{س + ٢}{٤}\ \text{جنيهاً} \quad (٢)$$

، نصيب الابن الثالث $= \frac{١}{٢}\left[س - \frac{س+٢}{٢} - \frac{س+٢}{٤}\right] + ١$

$$= \frac{١}{٢}\left[\frac{٤س - ٢س - ٤ - س - ٢}{٤}\right] + ١$$

$$= \frac{س - ٦}{٨} + \frac{٨}{٨} = \frac{س + ٢}{٨}\ \text{جنيهاً} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣)$$

،نصيب الابن الرابع $= \frac{١}{٢}\left[س - \frac{س+٢}{٢} - \frac{س+٢}{٤} - \frac{س+٢}{٨}\right] + ١$

$$= \frac{١}{٢}\left[\frac{٨س - ٤س - ٨ - ٢س - ٤ - س - ٢}{٨}\right] + ١$$

$$= \frac{س - ١٤}{١٦} + \frac{١٦}{١٦} = \frac{س + ٢}{١٦}\ \text{جنيهاً} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤)$$

∴ مقدار الثروة = مجموع المبالغ فى المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) مضافاً إليها مبلغ الـ ٣٠٠٠ جنيهاً المتروكة للمربية والخدم .

$$\therefore س = \frac{س + ٢}{٢} + \frac{س + ٢}{٤} + \frac{س + ٢}{٨} + \frac{س + ٢}{١٦} + ٣٠٠٠$$

$$= \frac{٨س + ١٦ + ٤س + ٨ + ٢س + ٤ + س + ٢}{١٦} + ٣٠٠٠$$

ومنها س = ٤٨٠٣٠ جنيهاً .

فالأول نصيبه $= \frac{٤٨٠٣٠ + ٢}{٢} = ٢٤٠١٦$ جنيهاً .

والثانى نصيبه $= \frac{٤٨٠٣٠ + ٢}{٤} = ١٢٠٠٨$ جنيهاً

والثالث نصيبه $= \frac{٤٨٠٣٠ + ٢}{٨} = ٦٠٠٤$ جنيهاً

والرابع نصيبه $= \frac{٤٨٠٣٠ + ٢}{١٦} = ٣٠٠٢$ جنيهاً

إجمالى أنصبة الأبناء = ٤٥٠٣٠ جنيهاً

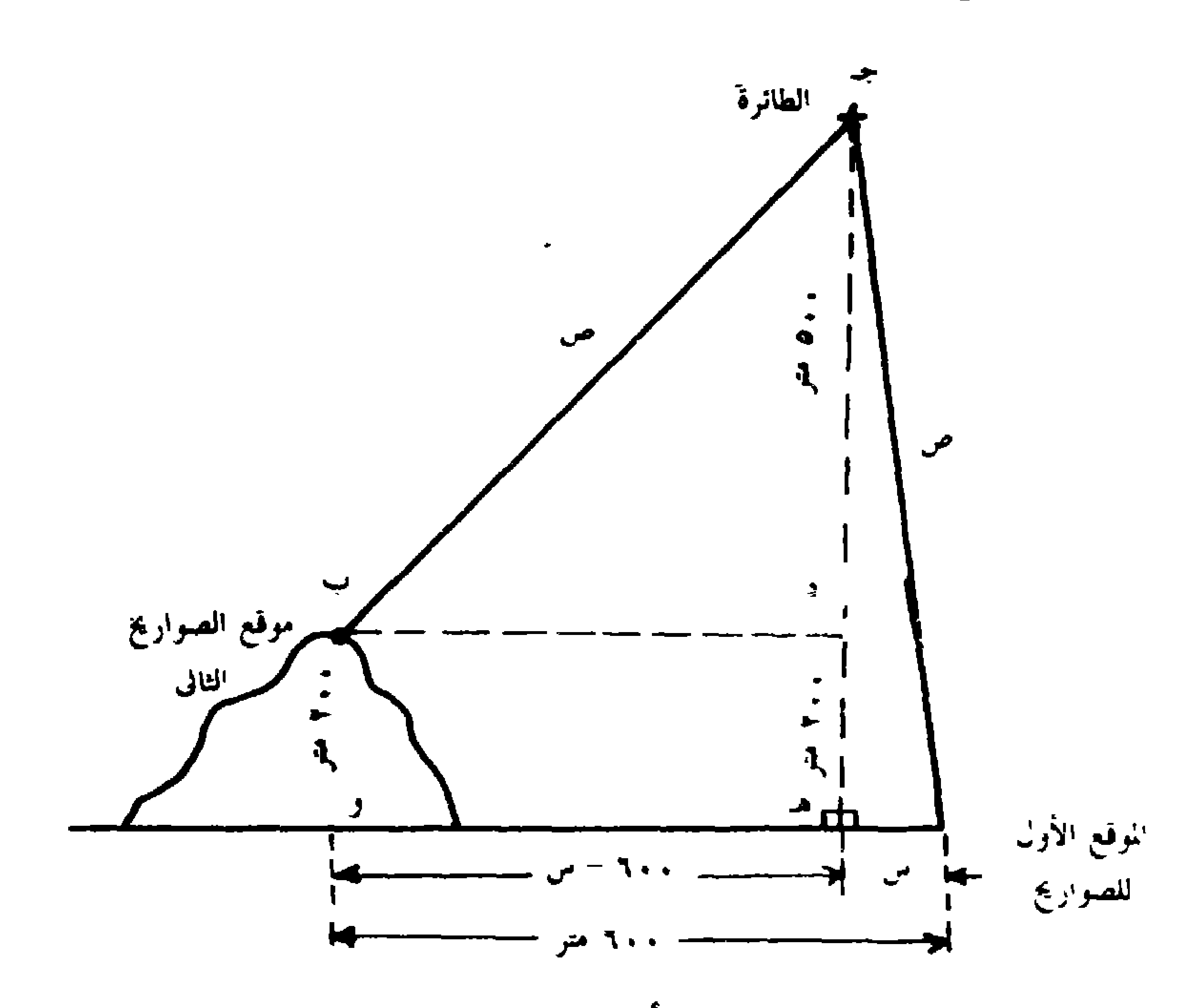
نصيب المربية والخدم = ٣٠٠٠ جنيهاً

، إجمالى الثروة = ٤٥٠٣٠ + ٣٠٠٠ = ٤٨٠٣٠ جنيهاً

١٦ـ موقعا صورايخ مضادة للطائرة المعادية ، تبلغ المسافة فيما بينهما ٦٠٠ متر ، ظهرت فجأة طائرة معادية فوق الخط الأفقى الواصل بينهما وكان أحد الموقعين فى مستوى سطح البحر والآخر يرتفع ٢٠٠ م عن سطح البحر ، فأُطلق عليها فى نفس الوقت صاروخان من الموقعين ومن نفس النوع فأصاباها فى نفس اللحظة ،

المطلوب حساب المسافة الأفقية بين موقع الطائرة على الأرض لحظة الإصابة وبين موقعى الصواريخ .

◀ الحـــل :



إذا رمزنا للمسافة بين الموقع الأول والطائرة بالرمز ص .

فإن المسافة ب جـ وهى التى يقطعها الصاروخ من الموقع الثانى ، تساوى أيضاً ص وذلك لأن الصاروخين من نفس النوع إنطلقا فى نفس الوقت وأصابا الطائرة جـ فى نفس الوقت وعليه فإن المسافة التى يسيرها كل من الصاروخين واحدة ومن هندسة الشكل نجد أن :

فى المثلث ا جـ هـ :

ص^{٢} = (٧٠٠)^{٢} + س^{٢} .... (١)

، فى المثلث جـ ب د :

ص^{٢} = (٥٠٠)^{٢} + (٦٠٠ − س)^{٢} .... (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ (٧٠٠)^{٢} + س^{٢} = (٥٠٠)^{٢} + (٦٠٠ − س)^{٢}

∴ ٤٩ × ١٠^{٤} + س^{٢} = ٢٥ × ١٠^{٤} + ٣٦ × ١٠^{٤} + س^{٢} − ١٢٠٠ س

ومنها ١٢٠٠ س = (٦١ − ٤٩) × ١٠^{٤}

∴ س = ١٢ × ١٠^{٤} ÷ ١٢ × ١٠^{٢} = ١٠٠ متر

∴ فبُعد مسقط الطائرة على الأرض عن الموقع الأول = ١٠٠ متراً .

، وبعد مسقط الطائرة على الأرض عن الموقع الثانى .

= ٦٠٠ − ١٠٠ = ٥٠٠ متراً

١٧ ـ فى إحدى سباقات الدراجات ، تحرك المتسابقون من نفس النقطة وبسرعات منتظمة لكل منهم ، فكان الثانى يسير بسرعة أقل من سرعة الأول بمقدار ٦ كم/ساعة ، وهو فى ذات الوقت يسير بسرعة أكبر من سرعة الثالث بأربعة كيلومترات / ساعة .

وقد وصل المتسابق الثانى إلى خط نهاية السباق بعد وصول الأول بنصف ساعة وقبل وصول الثالث بنصف ساعة كذلك .

والمطلوب منك معرفة : (أ) طول مسافة السباق

(ب) سرعة كل متسابق

(جـ) الزمن اللازم لإنهاء السباق لكل متسابق على حده .

◀ **الحـل :**

بالنظر لهذه المسألة بإمعان نجد أن بها عدداً كبيراً من المجاهيل إلا أنه بقليل من الحيلة يمكننا الحل كما يلى :

نفرض أن سرعة المتسابق الثانى = (س) كيلومتراً / ساعة

∴ سرعة المتسابق الأول = (س + ٦) كيلومتراً/ساعة

، سرعة المتسابق الثالث = (س − ٤) **كيلومتراً/ساعة**

ولنفترض كذلك أن مسافة السباق = ص كيلومتراً

، زمن السباق للمتسابق الأول = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$ = $\frac{\text{ص}}{(\text{س} + ٦)}$ ساعة .

، زمن السباق للمتسابق الثانى = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ساعة

، زمن السباق للمتسابق الثالث = $\frac{\text{ص}}{\text{س} - ٤}$ ساعة

وحيث أن المتسابق الثانى يصل بعد الأول لخط النهاية ، بنصف ساعة .

∴ زمن سباق الأول = زمن سابق الثانى − $\frac{١}{٢}$ ... ساعة

∴ $\frac{\text{ص}}{\text{س} + ٦} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} - \frac{١}{٢}$

ومنها $\frac{\text{ص}}{\text{س} + ٦} = \frac{٢\,\text{ص} - \text{س}}{٢\,\text{س}}$

∴ ٢ س ص = ٢ س ص − $\text{س}^{٢}$ + ١٢ ص − ٦ س

∴ $\text{س}^{٢}$ + ٦ س − ١٢ ص = صفر .... (١)

، زمن سباق الثانى = زمن سباق الثالث − $\frac{١}{٢}$ ساعة

∴ $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س} - ٤} - \frac{١}{٢}$

ومنها $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٢\,\text{ص} - \text{س} + ٤}{٢\,\text{س} - ٨}$

أى ٢ س ص − ٨ ص = ٢ س ص − $\text{س}^{٢}$ + ٤ س

∴ $\text{س}^{٢}$ − ٤ س − ٨ ص = صفر .... (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢)

∴ $\text{س}^{٢}$ + ٦ س − ١٢ ص = صفر .... (١)

$س^٢ - ٤ س - ٨ ص = صفر$ .... (٢)

بطرح (٢) من (١) ∴ $١٠ س - ٤ ص = صفر$

ومنها $ص = \frac{٥ س}{٢}$ .... (٣)

بالتعويض عن قيمة ص من (٣) فى المعادلة (٢)

∴ $س^٢ - ٤ س - \frac{٨ \times ٥ س}{٢} = صفر$

∴ $س^٢ - ٢٤ س = صفر$

∴ $س (س - ٢٤) = صفر$

∴ إما $س = صفر$

وهذا مرفوض وإما $س = ٢٤$ كيلومتراً / ساعة

∴ سرعة الثانى = ٢٤ كم / س

، سرعة الأول = ٣٠ كم / س (س + ٦)

، سرعة الثالث = ٢٠ كم / س (س - ٤)

ومن المعادلة (٣) :

∴ مسافة السباق $ص = \frac{٥ س}{٢} = \frac{٥ \times ٢٤}{٢} = ٦٠$ كيلومتراً .

ويكون الزمن اللازم لإنهاء السباق بالنسبة للمتسابق الأول =

$\frac{٦٠}{٢٤ + ٦} = ٢$ ساعة .

وزمن السباق للثانى $= \frac{ص}{س} = \frac{٦٠}{٢٤} = ٢,٥$ ساعة

، زمن السباق للثالث $= \frac{ص}{س - ٤} = \frac{٦٠}{٢٤ - ٤} = ٣$ ساعة

١٨ـ فى إحدى المناسبات تقابل عدد غير معروف من الأشخاص وتم التصافح بينهم جميعاً بالأيدى وعند إحصاء عدد مرات التصافح تبين أنها ٣٦ مصافحة ، هل يمكنك معرفة عدد الأشخاص المجتمعين فى هذه المناسبة .

◄ **الحـــل :**

نفترض أن عدد الأشخاص المجتمعين = س

ولو تابعنا أحد هؤلاء المجتمعين سنجده يصافح كل المجتمعين (فيما عداه طبعاً) ، فلو تصورنا مثلاً أن عدد المجتمعين ٢٠ شخصاً فإن أى واحد منهم سيصافح تسعة عشر شخصاً ، أى عدد المجتمعين ناقصاً واحد .

أى (س − ١)

وكل واحد من الـ س شخص المجتمعين سيصافح (س − ١) شخصاً أو (س − ١) مرة . كذلك

∴ فعدد مرات التصافح = س (س − ١) مرة .

ولكن لا يغيب عن الذهن أنه عندما يصافح محمد مثلاً أحمد فإن أحمد فى ذات الوقت يُصافح محمد (تصافح مكرر) .

وعلى هذا فعدد المصافحات الفعلية = $\frac{\text{س (س − ١)}}{٢}$

وفى مسألتنا هذه :

∴ ٣٦ = $\frac{\text{س (س − ١)}}{٢}$

∴ س^{٢} − س − ٧٢ = صفر .

ومنها :

(س − ٩) (س + ٨) = صفر

∴ س = ٩ أشخاص وطبعاً س = − ٨ جواب مرفوض

وعليه فإن عدد الأشخاص المجتمعين = ٩

، [$\frac{٩ \times ٨}{٢}$ = ٣٦]

ويمكن الحل بطريقة أخرى فالمطلوب هو عمل توافيق بين ن من الأشخاص إثنان إثنان ، وعدد التوافيق = ٣٦

∴ ٣٦ = $^{ن}ق_{٢}$

∴ ٣٦ = $\frac{\text{ن (ن − ١)}}{\underline{|٢}}$ = $\frac{\text{ن (ن − ١)}}{٢ \times ١}$

وهى تؤدى لنفس الجواب حيث أننا سنحصل على ن = ٩

١٩ـ فى أحد الأعياد تبادل عدد غير معروف من الأصدقاء إرسال بطاقات التهانى وعند إحصائها تبين أنها ١٣٢ بطاقة تهنئة ، هل لك أن تدلنا ، كم عدد الأصدقاء المتراسلين .

◀ **الحـــل :**

بنفس طريقة حل المسألة السابقة ،

لو إفترضنا أن عدد الأصدقاء = س

فإن كل شخص من المجموع س سيرسل عدد من بطاقات التهانى ، يبلغ عددها : (س − ١) .

وفى نفس الوقت كل شخص من المجموع س سيتلقى عدد من بطاقات التهانى قدرها (س − ١) .

وعليه فإن عدد بطاقات التهانى = [$\frac{\text{س (س − ١)}}{٢}$] × ٢

∴ ١٣٢ = س (س − ١) = س^{٢} − س

∴ س^{٢} − س − ١٣٢ = صفر

∴ (س − ١٢) (س + ١١) = صفر

∴ س = ١٢ صديق .

يمكن الحل بالتباديل كالتالى :

١٣٢ = $^{ن}ل_{٢}$ = ن (ن − ١)

∴ ن^{٢} − ن − ١٣٢ = صفر ومنها ن = ١٢ وهو عدد الأصدقاء المتراسلين

٢٠ـ يركب بكل السيارات بدون استثناء جهاز قياس لتحديد المسافات المقطوعة بواسطة السيارة ، لتقدير عمرها ولعمل معدلات للصيانة والإصلاح اللازمة . وتتركب معظم العدادات من ترس يدار بواسطة ترس دودى فيدير بدوره مجموعة من المسننات أو الطبلات أو البكرات عددها

ستة غالباً وهى تسجل المسافة المقطوعة بعشرات الألوف من الكيلومترات . والسؤال الآن كالآتى :

قراءة عداد المسافة بإحدى السيارات مسجل بها القراءة الآتية :

٨٧٦٥٤٣

فهل يمكنك حساب عدد الدورات الكلية التى دارتها البكرات الست وكم دورة دارتها كل بكرة منها .

◀ ***الحــل :***

القراءة المسجلة عبارة عن ست أرقام ، الرقم الأول من اليمين يمثل مئات الأمتار ، الرقم الثانى (من اليمين أيضاً) يمثل آحاد الكيلومترات الرقم الثالث (على البكرة الثالثة) يمثل عشرات الكيلومترات ، والرابع يمثل مئات الكيلومترات ، والخامس يمثل آلاف الكيلومترات ، والسادس يمثل عشرات آلاف الكيلومترات .

وعلى هذا فالرقم المسجل عبارة عن $\frac{٣}{١٠}$ ٨٧٦٥٤ كيلو متر .

، ∵ واحد كليو متر = ١٠٠٠ متر

∴ فكل عشر دورات للبكرة الأولى تكون السيارة قد سارت خلالها ١٠ × ١٠٠ متر = ١ كيلومتر وعليه تدور البكرة الثانية دورة واحدة .

وكل ١٠٠ دورة للبكرة الأولى تدور الثانية ١٠ دورات والثالثة تدور دورة واحدة [لكل عشر دورات من الثانية] .

وكل ١٠٠٠ دورة للبكرة الأولى تدور الثانية ١٠٠ دورة والثالثة عشر دورات والرابعة دورة واحدة [لكل عشر دورات من الثالثة] .

وكل ١٠٠٠٠ دورة للأولى تدور الثانية ١٠٠٠ دورة والثالثة ١٠٠ دورة والرابعة عشر دوارت والخامسة دورة واحدة [لكل عشر دورات من الرابعة]

وكل ١٠٠٠٠٠ دورة للأولى تدور الثانية ١٠٠٠٠ دورة والثالثة ١٠٠٠ دورة والرابعة ١٠٠ دورة والخامسة عشر دورات وتدور السادسة دورة واحدة [لكل عشر دورات من الخامسة] .

وبطريقة سهلة يمكننا حساب عدد الدورات لكل بكرة كالتالى : تُحوّل المسافة الكلية إلى مئات الأمتار للحصول على عدد دورات البكرة الأولى من اليمين :

عدد الكيلومترات الصحيحة = ٨٧٦٥٤ كيلومتراً

$$= ٨٧٦٥٤ \times \frac{١٠٠٠}{١٠٠} = ٨٧٦٥٤٠$$ مرة مئات أمتار

وعليه فإن عدد دورات البكرة الأولى =

٨٧٦٥٤٠ + ٣ (قراءة البكرة الأولى) = ٨٧٦٥٤٣ دورة .

[٨٧٦٥٤٣ دورة هو نفس عدد دورات كابل عداد السرعة الموصل فيما بين صندوق السرعات والعداد] .

، عدد دورات البكرة الثانية ، واضح أنه يساوى عدد الكيلومترات الصحيحة المقطوعة بواسطة السيارة لأن هذه البكرة تمثل آحاد الكيلومترات .

∴ فعدد دورات البكرة الثانية = ٨٧٦٥٤ دورة .

وهكذا ،

عدد دورات البكرة الثالثة = ٨٧٦٥ دورة صحيحة .

وقد أهملنا الكسر (٠,٤) لأنه يعنى أنه بعد ٦ دورات للبكرة الثانية من الآن سينقلب الرقم ٥ على اليمين من دورات البكرة الثالثة إلى الرقم ٦ .

، عدد دورات البكرة الرابعة = ٨٧٦ دورة صحيحة .

وقد أهملنا الكسر (٠,٥) لأنه يعنى أنه بعد ٥ دورات من البكرة الثالثة من الآن سوف ينقلب الرقم ٦ على اليمين من دورات البكرة الرابعة ويصبح ٧ .

، عدد دورات البكرة الخامسة = ٨٧ دورة صحيحة .

، عدد دورات البكرة السادسة = ٨ دورة صحيحة .

وعلى هذا يصبح مجموع الدورات الكلية لكل البكرات عندما تقطع السيارة مسافة سبعة وثمانون ألفاً وستمائة أربعة وخمسون وثلاث أعشار كيلومتراً مساوياً : ٨٧٦٥٤٣ + ٨٧٦٥٤ + ٨٧٦٥ + ٨٧٦ + ٨٧ + ٨

= ٩٧٣٩٣٣ دورة كاملة صحيحة .

وهو رقم يقترب من المليون دورة .

يضاف إليها كسور الدورات بالترتيب التالى :

٠,٣ + ٠,٤ + ٠,٥ + ٠,٦ + ٠,٧ = ٢,٥ دورة أخرى

على صورة كسور دورات لكل البكرات ما عدا الأخيرة على اليسار .

عشرات الالوف من الكيلو مترات	ألوف	مئات	عشرات	احاد الكيلومترات	مئات الأمتار
9	9	9	9	9	9
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

عشرات الالوف من الكيلو مترات	ألوف	مئات	عشرات	احاد الكيلومترات	مئات الأمتار
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	10
0	0	0	1	10	100
0	0	1	10	100	1000
0	1	10	100	1000	10000
1	10	100	1000	10000	100000

ويوضح الرسم بكرات عداد المسافة بالسيارة وعدد دورات كل بكرة بالنسبة للبكرات الأخريات .

٢١ـ إذا أردنا أن نضع نظاماً لأرقام التليفون بأحد الأقاليم أو المدن الصغيرة ذات عدد سكان (٥٠,٠٠٠) خمسون ألف نسمة .

فما هو أقصى عدد لأرقام التليفونات بهذه المدينة .

◀ **الحـــل :**

حيث أن عدد السكان حوالى ٥٠,٠٠٠ نسمة ، لذلك فنحن فى أحسن ظروف للخدمة التليفونية فعلينا وضع نظام أرقام ذو خمس خانات أى مكونات من خمسة أرقام .

ولما كان قرص التليفون مكوناً من عشر أرقام من صفر وحتى ٩ فإننا بهذا يمكننا أن نسجل عدداً من الأرقام لهذه المدينة كالتالى :

الخانة الأولى من اليمين لأى رقم مشترك يمكن أن تكون إما صفراً أو واحد أو إثنين وحتى ٩ أى عشر أرقام بخانة الآحاد .

ولكل رقم من أرقام خانة الآحاد يوجد عشرة أرقام يمكن شغلها بخانة العشرات ،

وعلى هذا فالخانة الأولى والثانية على اليمين يمكن أن يكونوا :

١٠ × ١٠ أى مائة رقم .

ولكل رقم من هذه المائة يمكن أن يأتى عدد من الأرقام من صفر وحتى ٩ بالخانة الثالثة (خانة المئات) .

وعلى ذلك فعدد الأرقام التى يمكن شغلها بخانة الآحاد والعشرات والمئات هو ١٠٠ × ١٠ أى ألف رقم .

وهكذا حتى خانة عشرات الألوف وهى الخانة الخامسة فعدد الأرقام التى يمكن أن تشغلها من ١ وحتى ٩ [لا يبدأ الرقم بصفر فى حالة رقم تليفون ذو خمسة أرقام] أى تسعة أرقام فقط وليس عشرة .

وعلى هذا فعدد الأرقام الممكن تكوينها من هذا النظام =

١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ٩ = ٩٠,٠٠٠ تسعون ألف رقم .

ملاحظة : يوضع النظام طبقاً لهذا ، وفى حالة قلة عدد المشتركين فإنه يمكن تثبيت أو توحيد رقم بالخانة الأخيرة على اليسار فمثلاً فى حالتنا هذه وعدد المشتركين بالطبع أقل من ٥٠,٠٠٠ بكثير فإنه يكفى أن نجعل الرقم الأول من على اليسار ١ أو ٢ أو من ١ إلى ٢ .

ففى الحالة الأولى يكون عدد الخطوط هو

١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١ = ١٠,٠٠٠ خط

وتكون أكبر قراءة لرقم تليفون بهذه المدينة هى ١٩٩٩٩

وفى حالة الرقم الأيسر ٢ فقط .

فإن عدد الخطوط = ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١ (خانة واحدة)

= ١٠٠٠٠ خط

ويكون أقل رقم تليفون بهذه المدينة هو ٢٠٠٠٠ أى عشرون ألف .

بينما أكبر رقم تليفون يكون ٢٩٩٩٩ أى تسعة وعشرون ألفاً وتسعمائة تسعة وتسعون .

وفى الحالة الثانية وهى عندما نأخذ الخانة الأخيرة على اليسار الرقم ١ إلى ٢ أى رقمان قد يكون واحداً وقد يكون إثنين :

فإن عدد الأرقام المتاحة فى هذه الحالة =

١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ٢ = ٢٠٠٠٠ عشرون ألف رقم

ويكون أصغر رقم تليفون بهذه المدينة هو ١٠٠٠٠ عشرة آلاف .

ويكون أكبر رقم تليفون بهذه المدينة هو ٢٩٩٩٩

وفى حالة أرقام التليفون ذات السبعة خانات ، يكون مجموع أرقام التليفونات المتاحة هو :

١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ٩

[الرقم الأيسر لا يبدأ بصفر أى ٩ مليون خط أو رقم تليفون لمشترك وهو يصلح لمدينة كبيرة مثل القاهرة . إلا أنه عادة ما يتم تثبيت أو توحيد الرقم الأيسر فمثلاً يبدأ برقم ٢ ، ٣ فقط [أى رقمين بدلاً من ٩ أرقام] فإن عدد الأرقام المتاحة فى هذه الحالة =

١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ٢ = ٢ مليون رقم فقط .

وقد يكون الرقم الأيسر تحديداً لسنترال معين أو منطقة سكنية أو حى محدد فمثلاً رقم ٢ يعنى حى مصر الجديدة ومدينة نصر مثلاً ، رقم ٣ قد يعنى سنترال رمسيس بوسط القاهرة . وهكذا ..

◄ أرقام لوحات المرور للسيارات :

بنفس طريقة التليفونات يمكن توزيع الأرقام لسيارات المحافظات المختلفة وللسيارات العسكرية والحكومية .

والأساس فى تحديد عدد خانات أرقام لوحة السيارة المعدنية هو عدد السيارات مثلما الحال فى حالة التليفونات فالأساس هو عدد المشتركين .

فلوحة الأرقام ذات الخمسة أرقام ، يكون عدد الأرقام المتاحة : هو

١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ٩ أى تسعون ألف رقم مختلف [الرقم الأيسر لا يبدأ بصفر بالطبع] .

وعند زيادة عدد السيارات وخاصة سيارات الركوب لكثرتها يمكن وضع نظام الستة أرقام حيث يكون عدد الأرقام المتاحة :

١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ٩ = ٩٠٠٠٠٠ أى تسعمائة ألف رقم مختلف

وفى حالة هيئات معينة أو السيارات الحكومية أو القطاع العام .

يمكننا تحديد أو تثبيت رقم الخانة اليسرى الأخيرة بأن نجعله يأخذ قيمة واحدة فقط مثلاً الواحد [بدلاً من ١ إلى ٩] ويمكن أيضاً تثبيت الخانة قبل الأخيرة من اليسار وعلى هذا فلوحة أرقام ذات ستة خانات ، باعتبار الخانتين الأخيريتين ٤٥ مثلاً ، تبدأ الأرقام من ٤٥٠٠٠٠ إلى ٤٥٩٩٩٩ [أى عشرة آلاف رقم فقط] .

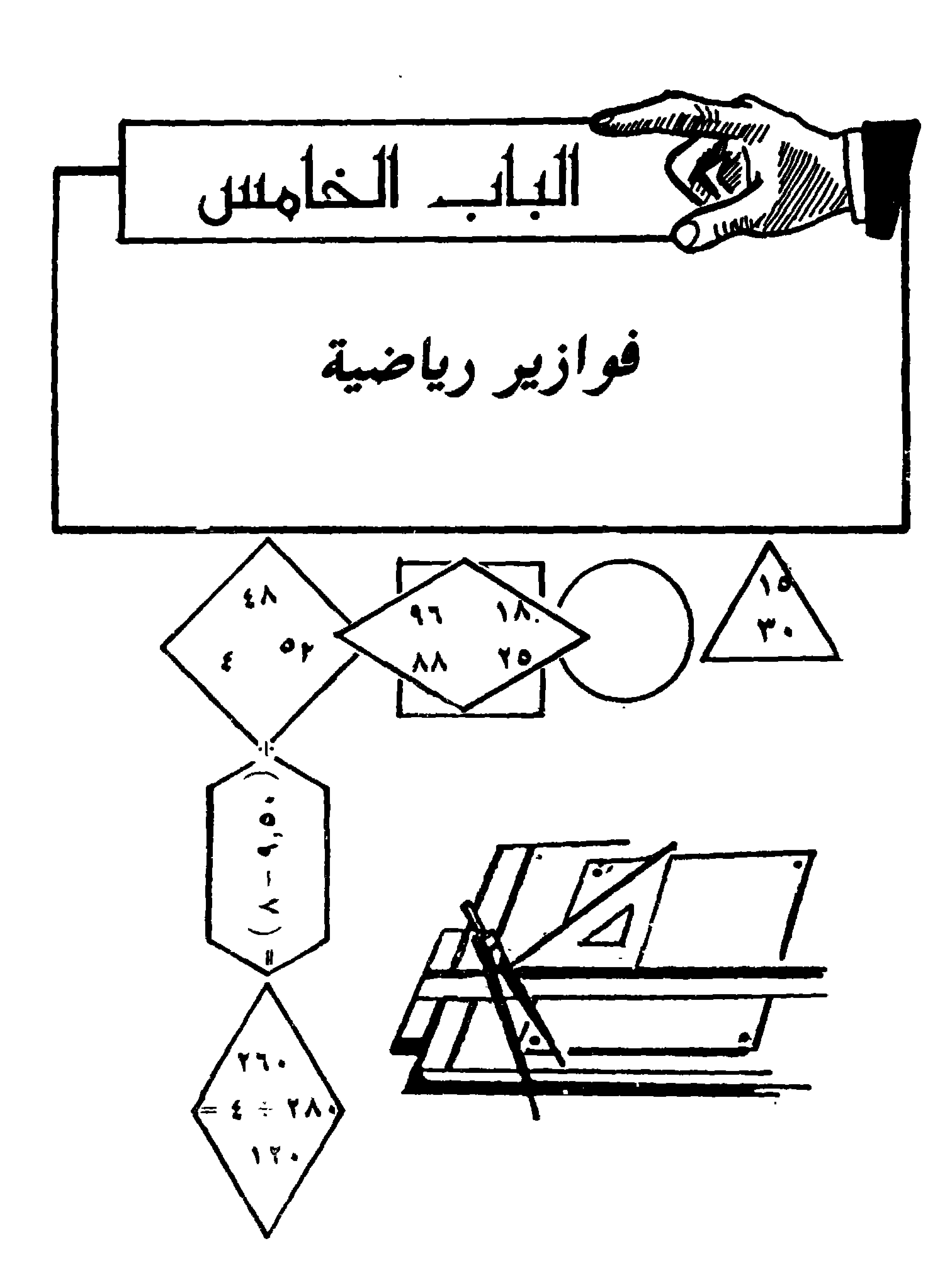
أى ٤٥٩٩٩٩ − ٤٥٠٠٠٠ = ٩٩٩٩ رقم سيارة مختلف





الباب الخامس

فوازير رياضية





١ ـ ثلاثة أشخاص ، لدى كل منهم مبلغ مختلف عن مبلغ الآخر إلا أن مجموع ما معهم = ٦٠ جنيهاً ،

فإذا أخذنا من الأول مبلغ من المال مساوٍ لما مع الثانى وأضفناه لما مع الثانى ثم أخذنا من الثانى مبلغاً مساوٍ لما مع الثالث وأضفناه للثالث ثم أخذنا من الثالث مبلغاً مساوٍ لما مع الأول وأضفناه للأول لأصبح كل منهم لديه نفس المبلغ .

فكم تبلغ قيم المبالغ التى كانت مع كل منهم فى البداية ، وبدون إستعمال معادلات جبرية .

◄ الحـــل :

لحل هذه المسألة نبدأ الحل بطريقة عكسية أى من النهاية حتى نصل لما كان معهم فى البداية ،

فى النهاية كان كل منهم معه مبلغاًمساوٍ لما مع الآخر = $\frac{٦٠}{٣}$ = ٢٠ جنيهاً

وقبل هذهِ الخطوة الأخيرة التى تساوت بموجبها المبالغ مع كل منهم ، ثم إضافة مبلغ ما للشخص الأول مساوٍ لما كان معه قبل الإضافة مباشرة من الشخص الثالث .

وعلى هذا فإن الأول كان معه قبل هذه الخطوة الأخيرة مبلغ ١٠ جنيهات فقط [ثم أضيف مبلغ مساوٍ أى ١٠ جنيهات أخرى من الثالث فأصبح مجموع ما معه ٢٠ جنيهاً] .

وحيث أننا أخذنا من الثالث ١٠ جنيهات وبعدها أصبح معه عشرون جنيهاً

∴ فالمبلغ الذى كان معه قبل هذه الخطوة هو ٣٠ جنيهاً .

أى أن توزيع المبالغ قبل الخطوة الأخيرة كان كالتالى .

الأول	الثانى	الثالث	
١٠	٢٠	٣٠	الخطوة قبل الأخيرة
١٠ +		١٠ −	
٢٠	٢٠	٢٠	الخطوة الأخيرة

وقبل الخطوة السابقة أخذنا من الثانى مبلغاً من المال مساوٍ لما مع الثالث أى أن مبلغ الثالث تضاعف فأصبح ٣٠ جنيهاً .

ومن البديهى أننا قد أضفنا للثالث ١٥ جنيهاً أخذت من الثانى وعلى هذا فإن توزيع المبالغ معهم فى الخطوة التى تسبق الخطوة السابقة كالتالى :

الأول	الثانى	الثالث
١٠	٣٥ (٢٠ + ١٥)	١٥

وقبل هذا أى فى البداية ، أخذنا من الأول مبلغاً يساوى ما مع التالى أى تضاعف مبلغ الثانى .

وعلى هذا فإنه تم أخذ مبلغ ١٧,٥ جنيهاً من الأول أُضِفت للثانى حتى يتضاعف ما مع الثانى ويصبح ٣٥ جنيهاً .

وبناء على ما تقدم فإن توزيع المبالغ كان كالتالى فى البداية :

	الأول	الثانى	الثالث
	٢٧,٥	١٧,٥	١٥
ثم	١٠	٣٥	١٥
ثم	١٠	٢٠	٣٠
ثم	٢٠	٢٠	٢٠

٢ ـ يبلغ ما مع أحمد وعلى ٣٠٠ جنيهاً ، إلا أن ما مع أحمد يزيد عما مع على بمبلغ ٨٠ جنيهاً فكم مع كل منهم .

◀ **الحـــل :**

مجموع ما مع أحمد وعلى هو ثلاثمائة .

، الفرق بين ما مع أحمد وعلى هو ثمانون جنيهاً .

وبناء على هذا فإن ضعف ما مع أحمد يجب أن يساوى

= ٣٠٠ + ٨٠ = ٣٨٠

∴ ما مع أحمد = $\frac{٣٨٠}{٢}$ = ١٩٠ جنيهاً .

∴ ما مع على = ١٩٠ − ٨٠ = ١١٠ جنيهاً .

قد يخطىء البعض ويتصور أن الأول معه ٢٢٠ .

، والثانى (٣٠٠ − ٢٢٠) = ٨٠ ، وهذا خطأ شائع فى هذا النوع من المسائل .

٣ ـ يبلغ مجموع مرتب موظف ما بالإضافة إلى حوافزه الشهرية ٢٦٠ جنيهاً وكان مرتبه يزيد بمبلغ مائتين جنيه عن حوافزه ، فكم يبلغ مرتبه .

◀ الحــل :

يجب عدم التسرع بالإجابة بأن المرتب هو ٢٠٠ جنيهاً بهذا خطأ ولكن وببساطة نذكر أن :

مجموع مرتبه وحوافزه = ٢٦٠ جنيهاً

فرق مرتبه عن حوافزه = ٢٠٠ جنيهاً

ومنها نصل إلى أن ضعف مرتبه = ٤٦٠ جنيهاً

ومنها مرتبة = $\frac{٤٦٠}{٢}$ = ٢٣٠ جنيها .

وتبلغ الحوافز حينئذ ٢٦٠ − ٢٣٠ = ٣٠ جنيهاً .

والآن نرى بسهولة أن ٢٣٠ − ٣٠ = ٢٠٠ وهو الفرق بين المرتب والحوافز .

٤ ـ سلتان من البيض مجموع ما بهما من بيض = ٤٧٠ بيضة فإذا كان البيض بالسلة الأولى يزيد عما بالسلة الثانية بمقدار ٣٠٠ بيضة .

فما مقدار البيض بكل سلة .

◀ الحــل :

مجموع البيض بالسلتين = ٤٧٠ بيضة

الفرق بين البيض بالسلتين = ٣٠٠ بيضة

وهذا يعنى أن ضعف الموجود بالسلة الأولى

= ٤٧٠ + ٣٠٠ = ٧٧٠ بيضة

∴ الموجود بالسلة الأولى = $\frac{٧٧٠}{٢}$ = ٣٨٥ بيضة

∴ البيض الموجود بالسلة الثانية = ٤٧٠ − ٣٨٥ = ٨٥ بيضة .

وواضح جلياً أن ٣٨٥ − ٨٥ = ٣٠٠

٥ ـ سار محمد بدراجته بسرعة تبلغ ١٠ كم/ساعة ، فوصل إلى المكان المحدد ، فى الساعة السادسة مساءً .

وعندما سار بسرعة ٢٠ كم/ساعة من نفس نقطة البداية وصل إلى نفس المكان الساعة الرابعة مساءً .

فهل يمكنك معرفة السرعة التى يجب أن يسير بها حتى يصل إلى نفس المكان المحدد فى تمام الساعة الخامسة مساءً .

◀ الحـــل :

طبعاً لو إعتقدنا أن السرعة المطلوبة هى متوسط السرعتين ١٠ ، ٢٠ كم

أى $\frac{١٠ + ٢٠}{٢}$ = ١٥كم/ساعة ؛ فهذا خطأ ،ولكن كيف لا يكون كذلك .

نفترض أن المسافة المطلوب سيرها إلى المكان المحدد = س كيلومتر

والأن ، إذا سار محمد بسرعة ١٠ كم/ساعة .فإن المسافة س

تستلزم منه وقتاً = $\frac{س}{١٠}$ ساعة .

وإذا سار بسرعة ٢٠ كم/ساعة فإن المسافة س تستغرق وقتاً

قدره $\frac{س}{٢}$ ساعة .

فإذا سار فرضاً بسرعة ١٥ كم/ساعة

فإنه يحتاج وقتاً لقطع هذه المسافة = $\frac{س}{١٥}$ ساعة

ومما سبق يجب أن يكون :

$$\frac{\text{س}}{١٠} + \frac{\text{س}}{٢٠} = ٢ \frac{\text{س}}{١٥}$$

أى $\frac{٦\ \text{س}}{٦٠} + \frac{٣\ \text{س}}{٦٠} = \frac{٨\ \text{س}}{٦٠}$

أى $\frac{٩}{٦٠} = \frac{٨}{٦٠}$

وواضح أن الطرفين غير متساويين وعليه فالسرعة ١٥ كم/س ليست السرعة المطلوب السير بها .

ولندرس حالة ما إذا سار محمد بسرعة ٢٠ كم/ساعة :

فهو إذا سار بهذه السرعة على الطريق لمدة زمنية تزيد ساعتين أى [الساعة السادسة ناقص الساعة الرابعة] ، أى بنفس الزمن عندما يسير بسرعة ١٠ كم/ساعة فإنه يقطع مسافة تزيد بـ : ٢ × ٢٠ = ٤٠ كم ، على ما يقطعه ولما كان محمد يقطع ١٠ كم فى الساعة أكثر من الحالة الأولى (١٠ كم/ساعة) فإن هذا يعنى أنه سيمكث على الطريق زمناً قدره = $\frac{٤٠}{١٠}$ = ٤ ساعات .

ومما سبق فإنه يمكن تحديد زمن الرحلة عندما كانت السرعة ٢٠ كم/س

فهى = ٤ − ٢ = ٢ ساعة

والمسافة المقطوعة فعلاً = ٢ × ٢٠ = ٤٠ كم/ساعة

∴ فالسرعة التى يجب أن يسير بها للوصول للمكان المحدد الساعة الخامسة أو بمعنى آخر لكى يقطع المسافة فى ٣ ساعات [٢ + ١]

= $\frac{٤٠}{٣}$ = ١٣ $\frac{١}{٣}$ كم/ساعة

وبناء على ما تقدم فإن المسألة تصبح بوضوح كالآتى :

يخرج محمد الساعة ٢ ظهراً ويسير بسرعة ١٠ كم/س ويسير ٤٠ كم [فى زمن ٤ ساعات]

، يخرج محمد الساعة ٢ ظهراً ويسير بسرعة ٢٠ كم/س ويسير ٤٠ كم [فى زمن ٢ ساعة]

أو يخرج محمد الساعة ٢ ظهراً ويسير بسرعة $١٣\frac{١}{٣}$ كم/س ويسير ٤٠ كم [فى زمن ٣ ساعات]

وفى الحالة الأولى يصل الساعة ٦ مساءً

وفى الحالة الثانية يصل الساعة ٤ مساءً

بينما فى الحالة الثالثة يصل الساعة ٥ مساءً

٦ ـ يسكن شاب وفتاة بنفس المنزل ويدرسان بنفس الجامعة ، ويقطع الشاب المسافة من المنزل إلى الجامعة سيراً على الأقدام فى ٢٠ دقيقة أما الفتاة فتسيرها على الأقدام فى ٣٠ دقيقة .

فبعد كم دقيقة يلحق الشاب بالفتاة فى الطريق ، إذا افترض وخرجت من منزلها مُبكرة عنه بخمس دقائق .

◄ ***الحـــل :***

يمكن حل هذه المسألة بثلاث طرق مختلفة :

الحل الأول :

يمكن للفتاة التى تقطع المسافة فى ٣٠ دقيقة ، أن تقطع فى خمس دقائق مسافة تبلغ $\frac{١}{٦}$ المسافة الكلية ($\frac{٥}{٣٠}$)

بينما يقطع الشاب فى خمس دقائق مسافة تبلغ $\frac{١}{٤}$ المسافة الكلية ($\frac{٥}{٢٠}$)

وعلى هذا فالفرق بين الشاب والفتاة كل خمسة دقائق

$$= \frac{١}{٤} - \frac{١}{٦} = \frac{١}{١٢}$$ من المسافة الكلية

ولما كانت الفتاة تسبق الشاب بخمس دقائق أى بمقدار $\frac{١}{٦}$ مسافة الطريق

∴ فالشاب يلحق بالفتاة بعد فترة زمنية = $\frac{١}{٦} \div \frac{١}{١٢} = ٢$ فترة زمنية

ولما كانت الفترة الزمنية = ٥ دقائق .

∴ فالشاب يلحق بالفتاة بعد زمن = ٢ × ٥ = ١٠ دقائق

أى بعد خروجها من منزلها بـ ١٠ + ٥ = ١٥ دقيقة

وتكون الفتاة حينئذ فى منتصف الطريق للجامعة .

الحل الثانى :

إذا سار جسمان بسرعتين مختلفتين فى إتجاه واحد وبينهما فاصل زمنى (أو مسافة) فإن هنالك قاعدة تنص على أن :

$$\text{زمن التلاقى} = \frac{\text{المسافة بين الجسمين عند بدء الحركة}}{\text{مجموع السرعتين}}$$

، س = المسافة الكلية

وسرعة الفتاة = $\frac{س}{٣٠}$ ، سرعة الشاب = $\frac{س}{٢٠}$

$$\therefore \text{زمن التلاقى} = \frac{\frac{س}{٦}}{\frac{س}{٣٠} + \frac{س}{٢٠}} = \frac{\frac{س}{٦}}{\frac{٢ س + ٣ س}{٦٠}} = \frac{١٠}{٥} = ٢ \text{ فترة}$$

أى بعد فترتين كل منهما ٥ دقائق من تحرك الشاب أى بعد ١٠ دقائق من تحرك الشاب .

الحل الثالث :

لو خرجت الفتاة مبكرة ١٠ دقائق فسيلحق الشاب بها عند باب الجامعة ، فإذا خرجت مبكرة ٥ دقائق فقط فإن مما لا شك فيه أنه سيلحق بها فى منتصف الطريق أى بعد خروج الشاب بعشر دقائق .

٧ ـ خرجت سيدة لشراء بعض مستلزمات المنزل من السوق وكان فى حافظة نقودها مبلغ يساوى حوالى ٢٣ جنيهاً وهذا المبلغ عبارة عن عملات ورقية فئة الجنيه وفئة الربع جنيه .

وعندما عادت السيدة وُجد معها عدد من الجنيهات الصحيحة بقدر عدد عملات الربع جنيه التى كانت معها قبل خروجها للسوق وُوجد معها

من العملات ذات الربع جنيه بقدر ما كان معها من الجنيهات قبل ذهابها للسوق .

فإذا عُلم أنه بقي بحافظة نقودها ثلث ما أخذته للسوق عند خروجها فهل يمكنك معرفة ثمن المُشتريات .

◀ **الحـــل :**

إذا فرضنا أن س = عدد الجنيهات الصحيحة .

وإذا فرضنا بأن ص = عدد العملات ذات الربع جنيه

وعلى ذلك :

فإنه كان معها فى البداية مبلغ = (١٠٠ س + ٢٥ ص) قرشاً .....(١)

وعند العودة تبقى معها مبلغ = (١٠٠ ص + ٢٥ س) قرشاً .....(٢)

ولما كان المبلغ الثانى = $\frac{١}{٣}$ المبلغ الأول

∴ ٣ (١٠٠ ص + ٢٥ س) = (١٠٠ س + ٢٥ ص)

∴ ٢٧٥ ص = ٢٥ س

∴ س = ١١ ص

فلو اعتبرنا أن ص = ١ فإن ما معها من جنيهات = ١١ جنيهاً

ويكون المبلغ الكلى معها = ١١,٢٥ وهذا لا يتفق مع كون المبلغ الذى كله معها قبل الشراء = حوالى ٢٣ جنيهاً .

وإذا اعتبرنا ص = ٢ فإن عدد الجنيهات = ١١ × ٢ = ٢٢ جنيهاً

وبالتالى فإن جملة ما كان معها = ٢٢ + ٢ × $\frac{١}{٤}$ = ٢٢,٥

وهو يتفق مع شروط المسألة [حوالى ٢٣ جنيهاً]

[لاحظ أن ص = ٣ فإن المبلغ سيكون ٣٣,٧٥ وهو يختلف كثيراً عما كان معها كما جاء برأس المسألة (حوالى ٢٣ جنيهاً)]

وبعد الشراء يتبقى :

١٠٠ × ٢ + ٢٥ × ٢٢ = ٧٥٠ قرشاً

وهو يعادل ثلث المبلغ الأصلى تماماً = [٢٢,٥٠]

∴ ثمن الشراء = ٢٢,٥٠ − ٧,٥٠ = ١٥ جنيهاً .

***

٨ ـ يبلغ إرتفاع قمة إيفرست بجبال الهيمالايا حوالى ٨,٠٠ كم ويراد معرفة الفرق فى طول المسار الذى ترسمه قمة الجبل ، وقمة رأس شخص يقف أسفل الجبل بالوادى ، عند دوران الكرة الأرضية دورة واحدة حول محورها (المحور الذى إحدى نهايته هو قمة الجبل) .

◄ الحـــل :

نعتبر طول نصف قطر الكرة الأرضية = نق [نق ليست ثابتة ولكنها متغيرة فى الواقع]

وأثناء دوران الأرض فإن أى جسم على سطحها يكون مساره دائرة ويكون طول مسار قمة الجبل = ٢ ط (نق + ٨) كيلومتر

بينما أى نقطة على سطح الأرض فإنها ترسم دائرة يبلغ طول محيطها طول محيط الكرة الأرضية أى = ٢ ط نق

∴ الفرق فى طول المسار الذى ترسمه قمة الجبل وقمة رأس شخص يقف بأسفل الجبل وبإهمال طول هذا الشخص

= ٢ ط (نق + ٨) − ٢ ط نق = ٢ ط × ٨ = ١٦ ط .

= ٥٠,٢٦٥ كيلو متراً .

وواضح أ الجواب لا يتوقف بأى حال على طول نصف قطر الكرة الأرضية .

***

٩ ـ توجه تاجر لشراء بضاعة وكان معه مبلغ حوالى ٥٢٠٠ جنيهاً مكونة من عملات فئة العشرة جنيهات والخمسة جنيهات وعندما عاد وجد أن معه من الورقة ذات العشرة جنيهات مبلغ يساوى (١/٤) ما كان معه من الورقة ذات

الخمسة جنيهات ويساوى $(\frac{1}{4})$ ربع ما كان معه من الورقة ذات العشرة جنيهات قبل الشراء .

فإذا عُلم أن ما بقى من مبلغ = $\frac{5}{16}$ مما كان معه فعلاً قبل الشراء .

فكم يبلغ سعر المشتريات .

◀ ***الحـــل :***

نفرض أن س = عدد الورقات فئة ١٠ جنيهات .

، نفرض أن ص = عدد الورقات فئة ٥ جنيهات .

وعلى هذا فالتاجر كان معه فى البداية مبلغ من الجنيهات =

(١٠ س + ٥ ص) جنيهاً .

وتبقى معه مبلغ بعد الشراء من الجنيهات =

$(\frac{ص}{4} \times 10 + \frac{س}{4} \times 5)$ جنيهاً .

ولما كان ما بقى معه يعادل $\frac{5}{16}$ من المبلغ الأصلى الذى كان معه فى البداية .

$$\therefore (\frac{ص}{4} \times 10 + \frac{س}{4} \times 5) = \frac{5}{16} (10\ س + 5\ ص)$$

$$\therefore \frac{10\ ص}{4} + \frac{5\ س}{4} = \frac{25\ س}{8} + \frac{25\ ص}{16}$$

$$\therefore \frac{40\ ص - 25\ ص}{16} = \frac{25\ س - 10\ س}{8}$$

$$\therefore 15\ ص = 15\ س \times 2$$

$$\therefore س = \frac{1}{2}\ ص$$

والآن لو اعتبرنا ص = ٢٠٠ ورقة

فتكون س = $\frac{200}{2}$ ورقة ويكون المبلغ الذى كان معه

قبل الشراء = $\frac{٢٠٠}{٢}$ × ١٠ + ٢٠٠ × ٥ = ٢٠٠٠ جنيهاً .

وهو يقل كثيراً عما كان معه (حوالى ٥٢٠٠ جنيهاً)

ولو اعتبرنا ص = ٦٠٠ فإن س = ٣٠٠

ويكون ما معه قبل الشراء = ٣٠٠ × ١٠ + ٦٠٠ × ٥ = ٦٠٠٠

وهو يزيد أيضاً عن المبلغ الذى كان معه .

فإذا اعتبرنا ص = ٥٢٠ ورقة تكون س = ٢٦٠ ورقة

ويكون المبلغ الذى كان معه = ٢٦٠ × ١٠ + ٥٢٠ × ٥

= ٢٦٠٠ + ٢٦٠٠ = ٥٢٠٠

وهو يتفق مع شروط المسألة تماماً .

وبعد الشراء يتبقى $\frac{٥٢٠}{٤}$ ورقة ذات العشرة جنيهات أى ١٣٠ ورقة

فئة العشرة بالإضافة إلى عدد ورقات من فئة الخمسة جنيهات = $\frac{٢٦٠}{٤}$

= ٦٥ ورقة

∴ الباقى معه = ١٣٠ × ١٠ + ٦٥ × ٥

= ١٣٠٠ + ٣٢٥ = ١٦٢٥ جنيهاً .

وهو يعادل : $\frac{١٦٢٥}{٥٢٠٠}$ = $\frac{٥}{١٦}$ من المبلغ الأصلى الذى كان معه

***

١٠ـ سيارتا نقل محملتان ببضاعة من نفس النوع ، لو أخذنا ١ طن من السيارة الأولى للثانية لتساوت الحمولتان ، ولو أخذنا ١ طن من السيارة الثانية ووضعناه على حمولة الأولى لأصبحت حمولة الأولى ضعف حمولة الثانية ، فكم تبلغ حمولة كل سيارة منهما .

◀ ***الحـــل :***

لو فرضنا حمولة السيارة الأولى = س

، لو فرضنا حمولة السيارة الثانية = ص

فعند إضافة ١ طن على حمولة السيارة الثانية تُصبح حمولتها ص + ١ وفى نفس الوقت تنقص حمولة السيارة الأولى بمقدار ١ طن وتصبح س − ١ وحينئذ تتساوى الحمولتان :

∴ ص + ١ = س − ١ ...... (١)

وبإضافة ١ طن لحمولة السيارة الأولى تصبح حمولتها س + ١ بينما تنقص حمولة السيارة الثانية بمقدار ١ طن وتصبح ص − ١ وحينئذ تكون حمولة الأولى ضعف حمولة الثانية :

∴ س + ١ = ٢ (ص − ١) ...... (٢)

من (١) :

∴ ٢ ص + ٢ = ٢ س − ٢ ...... (٣)

، من (٢) :

∴ ٢ ص − ٢ = س + ١ ...... (٤)

بطرح (٤) من (٣) :

∴ ٤ = س − ٣

ومنها س = ٧ طن وهى حمولة السيارة الأولى .

∴ ص = ٥ طن وهى حمولة السيارة الثانية

١١ـ إثنان لدى كل منهما حافظة نقود بها مبلغ غير معروف من الجنيهات أنه إذا أعطى الأول « ٧ » جنيهات للثانى لأصبح ما مع الثانى ضعف ما مع الأول ، بينما لو أعطى الثانى « ٧ » جنيهات للأول لتساوت المبالغ مع كل منهما ، فكم كان مقدار المبالغ بالحافظتين .

◀ **الحـــل :**

إذا فرضنا أن ما مع الأول من جنيهات = س جنيهاً .

، إذا فرضنا أن ما مع الثانى من جنيهات = ص

ومن رأس المسألة يمكننا تكوين معادلتين جبريتين بسيطتين حيث :

عندما يعطى الأول للثانى ٧ جنيهات يُصبح ما معه (س − ٧) جنيهاً

ويصير ما مع الثانى ص + ٧ جنيهات

وهنا يكون ما مع الثانى ضعف ما مع الأول .

∴ ص + ٧ = ٢ (س − ٧) ...... (١)

ولكن ص − ٧ = س + ٧ ...... (٢)

∴ من المعادلة الثانية :

ص = س + ١٤ .... (٣)

وبالتعويض عن ص = (س + ١٤) من (٣) فى المعادلة (١) :

∴ س + ١٤ + ٧ = ٢ س − ١٤

∴ س = ٣٥ ،

وبالتعويض عن س = ٣٥ فى المعادلة (٣) :

∴ ص = ٣٥ + ١٤ = ٤٩

∴ الأول معه ٣٥ جنيهاً .

والثانى معه ٤٩ جنيهاً .

وواضح أن : ٤٩ − ٧ = ٣٥ + ٧ (يتساويان)

٤٩ + ٧ = ٢ (٣٥ − ٧) (الضعف)

١٢ ـ أربعة أشخاص مجموع ما معهم = ٤٠,٥ جنيهاً ، فلو زدنا على ما مع الأول جنيهين وأنقصنا من الثانى جنيهين وضاعفنا ما مع الثالث وأخذنا من الرابع نصف ما معه . لأصبح مع كل منهم نفس المبلغ .

فكم كان مع كل منهم .

◄ **الحـــل :**

نفرض أن المبالغ معهم هى س ، ص ، ع ، م على الترتيب .

∴ س + ص + ع + م = ٤٠,٥ ...... (١)

ويصبح :

الأول بعد زيادته جنيهان = س + ٢

، الثانى بعد إنقاصه جنيهان = ص − ٢

، الثالث بعد مضاعفة ما معه = ٢ ع

، الرابع بعد مناصفة ما معه = $\frac{\text{م}}{٢}$

وحينئذ تتساوى المبالغ معهم جميعاً أى :

س + ٢ = ص − ٢ = ٢ ع = $\frac{\text{م}}{٢}$

ولحل هذه المعادلات نقول :

س + ٢ = ص − ٢ ومنها ص = س + ٤ .... (٢)

، س + ٢ = ٢ ع ومنها ع = $\frac{١}{٢}$ (س + ٢) .... (٣)

، س + ٢ = $\frac{\text{م}}{٢}$ ومنها م = ٢ س + ٤ .... (٤)

وبالتعويض عن قيم ص ، ع ، م من (٢) ، (٣) ، (٤) فى المعادلة (١) :

∴ س + (س + ٤) + $\frac{١}{٢}$ (س + ٢) + (٢ س + ٤) = ٤٠,٥

∴ ٤,٥ س + ٩ = ٤٠,٥

∴ ٩ س = ٨١ − ١٨ = ٦٣

∴ س = ٧ ومنها

∴ ص = ٧ + ٤ = ١١ ...... من (٢)

، ع = $\frac{٧ + ٢}{٢}$ = ٤,٥ ...... من (٣)

، م = ٢ × ٧ + ٤ = ١٨ ...... من (٤)

وعلى هذا فالمبالغ كان توزيعها كالتالى :

٧	١١	٤,٥	١٨
بجمع + ٢	وطرح − ٢	وضرب × ٢	وقسمة ÷ ٢
٩	٩	٩	٩

وهى متساوية

●——••••——●

١٣ ـ ثلاثة أفراد مجموع ما معهم = ٤٢ جنيهاً ، ولو أنقصنا مما مع الأول ثلاثة جنيهات وضاعفنا ما مع الثانى ثلاث مرات وأبقينا للثالث ثلث ما معه لأصبح كل منهم معه نفس المبلغ .

والمطلوب معرفة ما مع كل منهم .

◀ ***الحـــل :***

نفرض أن ما مع الأول = س

، نفرض أن ما مع الثانى = ص

، نفرض أن ما مع الثالث = ع

∴ س + ص + ع = ٤٢ ...... (١)

ويصبح ما مع الأول س − ٣ بإنقاص ثلاثة جنيهات

ويصبح ما مع الثانى ٣ ص بمضاعفته ثلاث مرات

ويصبح ما مع الثالث $\frac{ع}{٣}$ بإنقاصه للثلث

وحينئذ يصبح كل منهم معه نفس المقدار :

∴ س − ٣ = ٣ ص = $\frac{ع}{٣}$

، ∵ س − ٣ = ٣ ص ∴ ص = $\frac{(س - ٣)}{٣}$ ...... (٢)

، ∵ س − ٣ = $\frac{ع}{٣}$ ∴ ع = ٣ س − ٩ ...... (٣)

وبالتعويض عن قيم ص ، ع من (٢) ، (٣) فى المعادلة (١) :

∴ س + ((س − ٣) / ٣) + (٣ س − ٩) = ٤٢

∴ ٣ س + س − ٣ + ٩ س − ٢٧ = ١٢٦

∴ ١٣ س = ١٥٦

ومنها س = ١٢ جنيهاً

∴ ص = ((١٢ − ٣) / ٣) = ٣ جنيهات   من معادلة (٢)

، ع = ٣ × ١٢ − ٩ = ٢٧ جنيهاً   من معادلة (٣)

المبالغ كالآتى :

١٢ ،	٣ ،	٢٧
،بطرح − ٣ ،	وبالضرب × ٣ ،	وبالقسمة ÷ ٣
٩	٩	٩

وهى مبالغ متساوية .

١٤ـ ثلاثة أوعية سعاتها ١٠ لتر ، ٧ لتر ، ٣ لتر .
والكبير منها مملوء تماماً بسائل والباقيان فارغان ، يراد باستعمال الثلاث أوعية تقسيم هذا السائل إلى نصفين تماماً النصف الأول بالوعاء الكبير والنصف الآخر بالوعاء الأوسط .

◄ **الحـــل :**

مثل هذا النوع من المسائل لا يحتاج إلى أية قوانين أو معادلات للحل ، كل ما هنالك بعض من المهارات والمحاولات التى تؤدى بلا شك إلى النتيجة المرجوة .

سنبدأ فى هذه المسألة بنقل السائل من الوعاء الأكبر إلى الأوعية الأخرى وبتسلسل يؤدى فى النهاية إلى تنصيف الكمية وسوف نكتب تحت الثلاث

أوعية بالشكل أرقاماً توضح ما تم نقله وما تم إضافته إلى وعاء وعلى خطوات .

	٣	٧	١٠
	–	–	١٠
١	–	٧	٣
٢	٣	٤	٣
٣	–	٤	٦
٤	٣	١	٦
٥	–	١	٩
٦	١	–	٩
٧	١	٧	٢
٨	٣	٥	٢
٩	–	٥	٥

وتنتهى العملية بعد تسع عمليات إلى أن يصبح بالوعاء الأكبر ٥ لتر والأصغر فارغ ، بينما الأوسط به ٥ لتر كذلك .

١٥ ـ ثلاث أوعية تستخدم كمكيال للسوائل ساعتها ٦ ، ٣,٥ ، ٢ لتراً على الترتيب ، فإذا كان الكبير مملوءاً بسائل ويراد تقسيمه إلى جزئين كل منهما ٣ لترات ، فكيف السبيل .

◄ **الحـــل :**

يتم حل هذه المسألة كما هو مبين بالجدول المرفق وتنتهى عملية القسمة بعد إجراء عمليات الملء والتفريغ المتعاقبة بالأوعية المختلفة فى الخطوة السابعة .

	سعة الوعاء الأول ملء وبه ٦ لتر	سعة الوعاء الثانى فارغ	سعة الوعاء الثالث فارغ
١	٢,٥	٣,٥	—
٢	٢,٥	١,٥	٢
٣	٤,٥	١,٥	—
٤	٤,٥	—	١,٥
٥	١	٣,٥	١,٥
٦	١	٣	٢
٧	٣	٣	—

يتم حل المسألة كما هو مبين بالجدول المرفق وتنتهى عملية القسمة بعد إجراء عمليات الملء والتفريغ المتعاقبة بالأوعية المختلفة فى الخطوة السابعة .

١٦ـ على خط مترو الأنفاق من ميدان رمسيس وحتى حلوان حوالى ٢٠ محطة مختلفة ، فهل يمكنك معرفة عدد الأشكال المختلفة [فى سعرها] من التذاكر (والمفروض) إعدادها من هيئة مترو الأنفاق لكل شبابيك أو منافذ بيع هذه التذاكر .

◄ **الحـــل :**

يوجد فى كل محطة من المحطات العشرين منفذ بيع تذاكر يمكنك أن تطلب منه تذكرة لأى من المحطات التسعة عشر الباقية .

وعلى هذا فإنه يلزم طبع عدد من أنواع التذاكر :

= ٢٠ × ١٩ = ٣٨٠ تذكرة مختلفة

أما إذا كان هنالك نظام تذاكر ذهاب وعودة ، فإنه يلزم حينئذ مضاعفة هذا الرقم ويصبح عددها

= ٣٨٠ × ٢ = ٧٦٠ شكلاً مختلفاً .

ملاحظة : [تقوم هيئة مترو الأنفاق بإصدار تذاكر موحدة الفئة] .

١٧ـ سُئل رجل عن عمره فأجاب بطريقة جعلتها فزورة .

كان عمري منذ ١٥ سنة ضعف عُمر إبني بعد خمس سنوات وأنا الآن أكبر منه بثلاث مرات ، فكم عُمر كُل منهما .

◀ ***الحــل :***

إذا فرضنا أن عمر الإبن الآن = س عاماً

فيكون عمره بعد خمس سنوات = س + ٥ عاماً

وعمر الأب الآن = ٣ س

وعمر الأب منذ ١٥ سنة = ٣ س − ١٥

وبناء على ما تقدم يمكن تكوين المعادلة الآتية :

٣ س − ١٥ = ٢ (س + ٥)

∴ س = ٢٥ عاماً

فيكون عمر الأب = ٣ × ٢٥ = ٧٥ عاماً

وعمر الأب منذ ١٥ سنة = ٧٥ − ١٥ = ٦٠ عاماً

عمر الإبن بعد خمس سنوات = ٢٥ + ٥ = ٣٠ عاماً

ومن هذا يتضح أن الإبن بعد خمس سنوات يكون عمره ثلاثون عاماً وهو نصف عمر أبيه منذ ١٥ سنة .

١٨ـ كيف يمكنك تحديد عمرى الآن ، إذا علمت ما هو آت .

قضيت $\frac{1}{5}$ عمرى الآن فى فترة الطفولة وبعدها بخمس سنوات حصلت على شهادة الإعدادية وبعدها بفترة تبلغ $\frac{1}{4}$ عمرى الآن تخرجت مهندساً من الجامعة ثم عملت مباشرة لمدة سبع سنوات ثم سافرت للخارج لمدة تبلغ $\frac{1}{8}$ عمرى ثم عُدت من الخارج وتزوجت مباشرة فأنجبت طفلى الأول بعد عام من زواجنا وكان هذا منذ أربع سنوات ،

◀ **الحــل :**

إذا فرضنا أن العمر الآن هو س فيكون :

فترة الطفولة = $\frac{١}{٥}$ × س = $\frac{س}{٥}$ سنة

الحصول على شهادة الإعدادية بعد خمس سنوات = + ٥ سنة

من تاريخ الحصول على الإعدادية وحتى التخرج = $\frac{س}{٤}$ سنة

فترة العمل = ٧ سنين

فترة السفر للخارج = $\frac{س}{٨}$ سنة

إنجاب أول طفل بعد = ١ سنة

منذ ٤ سنوات = + ٤ سنوات

ويمكننا الآن بسهولة أن نُكّون المعادلة البسيطة التالية :

$$س = \frac{س}{٥} + ٥ + \frac{س}{٤} + ٧ + \frac{س}{٨} + ١ + ٤$$

$$= ١٧ + \frac{٨ س + ١٠ س + ٥ س}{٤٠} = ١٧ + \frac{٢٣ س}{٤٠}$$

$$\therefore س - \frac{٢٣ س}{٤٠} = ١٧$$

$$\therefore \frac{٤٠ س - ٢٣ س}{٤٠} = ١٧$$

∴ ١٧ س = ١٧ × ٤٠

∴ س = ٤٠ عاماً

وهو عمرى الآن .

فترة الطفولة = $\frac{٤٠}{٥}$ = ٨

وبعدها بخمس سنوات الحصول على الإعدادية أى عند (١٣) عاماً

وبعدها بـ ($\frac{٤٠}{٤}$) أى عشر سنوات تخرج مهندساً (٢٣ عاماً)

ثم سبع سنوات عمل (٣٠) ثم ($\frac{٤٠}{٨}$ = ٥)

أى عند (٣٥) عاماً عدت من الخارج وأنجبت أول طفل (٣٦) عاماً

ثم + ٤ = ٤٠

---

١٩ ـ سارت سيارة من القاهرة متجهة إلى سوهاج بسرعة ٨٠ كم/ساعة فوصلت الساعة الواحدة ظهراً ، وتحركت معها فى نفس الوقت سيارة أخرى من نفس الموضع متجهة إلى سوهاج كذلك وبسرعة ١٢٠ كم/ساعة فوصلت الساعة الحادية عشرة صباحاً (قبل الظهر)

فهل يمكنك حساب السرعة التى تسير بها سيارة مثيلة من نفس المكان لتصل إلى المكان المحدد بسوهاج وبحيث تصل فى تمام الساعة ١٢ ظهراً .

◄ ***الحـــل :***

سرعة الإجابة قد تدفعك إلى القول بأن السرعة المطلوبة هى المتوسط الحسابى للسرعتين ٨٠ ، ١٢٠ أى بسرعة ١٠٠ كم/ساعة .

إلا أن واقع الأمر يختلف ولمعرفة هذا نقول :

نفترض أن السيارة التى تسير بسرعة ١٢٠ كم/ساعة قد سارت لمدة ساعتين زائدتين (فرضاً) وبنفس السرعة (١٢٠ كم/س) ، فإنها سوف تقطع

مسافة تزيد ب ٢ × ١٢٠ = ٢٤٠ كم عن المسافة الفعلية التى قطعتها ،

وحيث أن فارق السرعة فى المسافة بينها وبين السيارة الأولى :

= ١٢٠ − ٨٠ = ٤٠ كم/ساعة .

∴ فهو يمكث بالطريق زمناً قدره = ٢٤٠ ÷ ٤٠ = ٦ ساعات

ومن هنا يمكننا معرفة أن الزمن الفعلى الذى إستغرقه فى الطريق

= ٦ ساعات − ٢ ساعة = ٤ ساعات

وتقطع خلالها السيارة مسافة = ٤ × ١٢٠ = ٤٨٠ كم

وهى المسافة الفعلية بين القاهرة وسوهاج .

والمطلوب هو حساب سرعة سيارة تقطع مسافة ٤٨٠ كيلو متراً فى زمن قدره بين (٦ ، ٤) ساعات أى فى خمس ساعات

والسرعة المطلوبة = $\frac{٤٨٠}{٥}$ = ٩٦ كيلو متراً/ساعة

	السيارة الأولى	السيارة الثانية	السيارة الثالثة
المسافة	٤٨٠	٤٨٠	٤٨٠
السرعة	٨٠	١٢٠	٩٦
الزمن/ساعة	٦	٤	٥
ساعة الوصول	الواحدة ظهراً	الحادية عشرة صباحاً	الثانية عشر ظهراً

***

٢٠ـ إذا اعتبرنا أن إرتفاع بُرج الجزيرة حوالى ١٨٠ متراً وباعتبار أن وزنه يُعادل بالتقريب فرضاً ١٠٠٠٠ طن ،

وقد تم عمل نموذج مشابه لهذا البرج فى أحد المعارض بالخارج ، فكان إرتفاعه = ١٨٠ سم فهل يمكنك معرفة وزن هذا النموذج .

◀ **الحـــل :**

حيث أن حجم الأشكال المتشابهة تكون متناسبة كمكعب الإرتفاعات ولما كانت نسبة الإرتفاعات = $\frac{١,٨ م}{١٨٠ م}$ = $\frac{١}{١٠٠}$

∴ نسبة الحجمين أى حجم النموذج : حجم البرج الأصلى تكون كنسبة :

$$(\frac{١}{١٠٠})^٣ = \frac{١}{٦١٠}$$

أى كنسبة واحد إلى مليون .

ولما كان النموذج مصنوعاً من نفس خامات ومواد البرج (نفس الكثافة) لذا فإن النموذج لابد وأن يكون أخف من البرج الأصلى بنفس النسبة أى أن وزن النموذج

= $\frac{١}{٦١٠}$ من وزن البرج الأصلى

= $\frac{١}{٦١٠}$ × ١٠٠٠٠٠ × ١٠٠٠ = ١٠ كجم

٢١ـ تقوم إحدى الشركات الهندسية بإنتاج سلعة ما ذات شكل متوازى سطوح وقد تم عمل نموذج مصغر (ماكيت) لهذه السلعة أبعاده أصغر من السلعة الأصلية بمقدار العُشر فكان وزنه = ٤٠ جم ، فكم يكون وزن السلعة الأصلية .

◀ **الحـــل :**

إذا تصورت أن الإجابة هى عشرة أضعاف الـ (٤٠) جم فهذا خطأ فادح وذلك لأن العينة أو الماكيت أصغر من الأصل فى الطول والعرض والإرتفاع بمقدار العُشر .

لذلك فإن حجم السلعة الأصلية أكبر من الماكيت بمقدار ١٠ × ١٠ × ١٠ = ١٠٠٠ مرة حجماً .

ولما كانت المادة المستخدمة فى صنعهما واحدة .

∴ فوزن العينة الأصلية = ١٠٠٠ × ٤٠ = ٤٠ كجم

٢٢ـ جسم هندسى مفرغ وكروى الشكل يبلغ وزنه ٢٠٠ كجم ، يراد عمل نموذج له من نفس المادة المصنوع منها الجسم الأصلى وبحيث تكون أبعاد العينة بمقدار خُمس ($\frac{1}{5}$) الأبعاد الأصلية ، فكم يبلغ وزن الكرة العينة .

◀ **الحـــل :**

ليس كما قد يتبادر إلى ذهنك لأول وهلة أن وزن النموذج يعادل ٢٠٠ × $\frac{1}{5}$ = ٤٠ كجم ،.

ففى الواقع ، تُكون مساحة سطح النموذج أصغر بمقدار $\frac{1}{25}$ مرة عن الأصل وليس العُشر ، ولما كانت سطوح الأجسام المتشابهة تتناسب مع مربعات أبعادها ، باعتبار سمك الجدار واحد ويتم صنعهما من نفس الخامة .

، ∵ مساحة سطح الكرة = ٤ ط نق^{2}

∴ مساحة سطح الكرة الأصلية = ٤ ط نق^{2} .... (١)

، مساحة سطح الكرة العينة = ٤ ط $\left(\frac{\text{نق}}{5}\right)^{2}$ .... (٢)

وبقسم (٢) على (١) :

∴ مساحة سطح الكرة العينة = $\frac{1}{25}$ من مساحة مسطح الكرة الأصلية .

ولما كانتا مصنوعتين من نفس المادة وبنفس سمك الجدار (حتى لا يتغير نصف القطر)

∴ فوزن النموذج = ٢٠٠ × $\frac{1}{25}$ = ٨ كجم

٢٣ـ كأسان زجاجيان متشابهان يسع الأول ما مقداره سبعة وعشرين ضعف ما يسعه الكأس الصغير .

فبكم مرة يبلغ وزن الكأس الأكبر نسبة إلى الكأس الأصغر (وهو فارغ)

◀ **الحـــل :**

حيث أن الكأسين متشابهين هندسياً ، ولما كان الكأس الأكبر أكبر فى السعة من الكأس الأصغر بمقدار (٢٧) مرة ، لذا فإن المقاييس البعدية للأكبر تكون أكبر بمقدار ثلاث مرات [٣ × ٣ × ٣ = ٢٧]

وحيث أنه أعلى وأوسع من الصغير بمقدار ثلاث مرات .

لذلك فإن مساحة سطحه تكون أكبر بمقدار ٣ × ٣ = ٩ مرات

، ∵ سطوح الأجسام المتشابهة تتناسب مع مربعات أبعادها الخطية

، ∵ سمك مادة الجدار واحدة والخامة المستعملة واحدة .

لذلك فإن الوزن هنا يتوقف على مساحة السطح .

وعلى هذا فالكأس الأكبر يكون أثقل من الأصغر بمقدار ٩ مرات (وهو فارغ) .

٢٤ـ دورقان لهما نفس الشكل ومملوءان بنفس السائل ومصنوعان من نفس المادة وسمكهما رقيق .

أحدهما يزن مملوءاً ٤ كجم وإرتفاعه ٢٥ سم بينما يزن الآخر مملوءاً ٢ كجم وإرتفاعه = ١٩,٧٠ سم

المطلوب منك حساب وزن السائل الموجود بكل من الدورقان .

◀ **الحـــل :**

نفرض أن وزن السائل بالدورق الأكبر = س كجم

، نفرض أن وزن السائل بالدورق الأصغر = ص كجم .

، نفرض أن وزن الدورق الفارغ الأكبر = ع كجم

، نفرض أن وزن الدورق الفارغ الأصغر = ل كجم

∴ س + ع = ٤ كجم .... (١)

، ص + ل = ٢ كجم .... (٢)

ومن معطيات المسألة ، حيث أنهما مصنوعان من نفس المادة وبسمك رقيق ، فإن حجم السائل فى الدورقين يتناسب مع حجميهما أى (تقريباً) مع مكعب إرتفاعيهما .

$$\therefore \frac{س}{ص} \simeq \frac{(٢٥)^٣}{(١٩,٧)^٣} = \frac{١٥٦٢٥}{٧٦٤٥,٤} \simeq ٢,٠٤$$

∴ س ≃ ٢,٠٤ ص .... (٣)

ويتناسب وزن الدورق الفارغ مع مساحة سطحه الكلية أى مع مربع الإرتفاع .

$$\therefore \frac{ع}{ل} = \frac{٢٢٥}{(١٩,٧)^٢} = ١,٦١$$

∴ ع = ١,٦١ ل .... (٤)

وبالتعويض من (٣) ، (٤) فى (١) ، (٢) :

∴ ٢,٠٤ ص + ١,٦١ ل = ٤ .... (٥)

، ص + ل = ٢ .... (٦)

وبضرب المعادلة (٦) فى ١,٦١ لكلا الطرفين :

، ١,٦١ ص + ١,٦١ ل = ٣,٢٢ .... (٧)

وبطرح المعادلة (٧) من المعادلة (٥) :

∴ ٠,٤٣ ص = ٠٠,٧٨

∴ ص = ١,٨١ كجم

بالتعويض فى (٢) ، (٤) :

∴ ل = ٢ − ١,٨١ = ٠,١٩ كجم

، ع = ١,٦١ × ٠,١٩ ≃ ٠,٣١ كجم

وبالتعويض فى (١) :

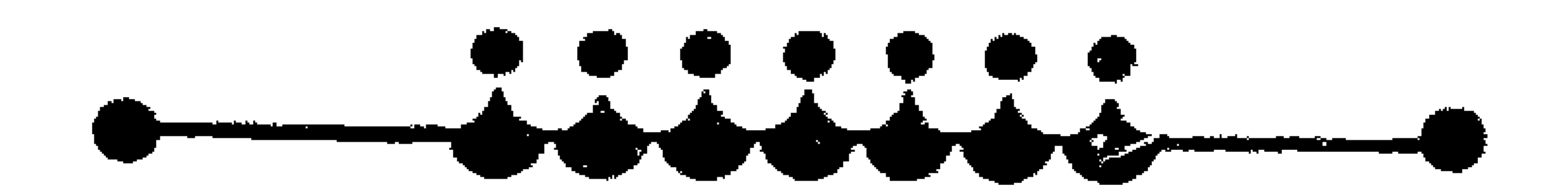
∴ س = ٤ − ٠,٣١ = ٣,٦٩ كجم .

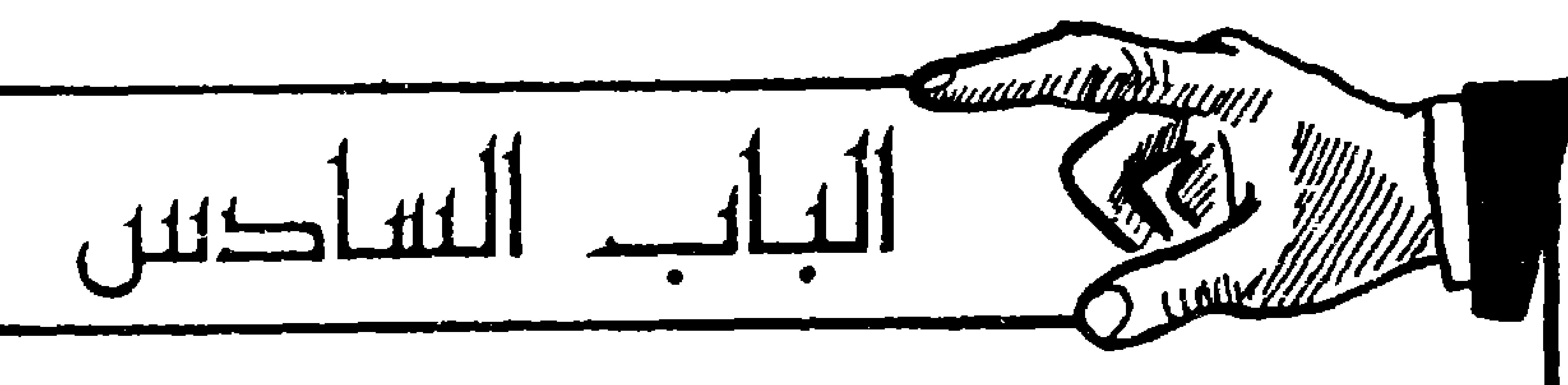
∴ فالدورق الأول وزنه فارغاً

= ٠,٣١ كجم ووزن السائل به ٣,٦٩ كجم .

، الدورق الأصغر وزنه فارغاً

= ٠,١٩ كجم ووزن السائل به ١,٨١ كجم .





الفائدة العملية من مسائل المتواليات

١ ـ أوجد مجموع جميع الحدود الموجبة من المتوالية العددية :

٢٧ ، ٢٤,٥ ، ٢٢ ، ....

◀ **الحـــل :**

لحل هذه المسألة يجب معرفة أول حد سالب ، ولنفترض أن هذا الحد هو الحد النونى :

، ∵ $ح_{ن}$ = ا + (ن − ١) د

حيث $ح_{ن}$ هو أول حد سالب ، ا = الحد الأول من المتوالية .

، د = أساس المتوالية ، ن = رتبة أول حد سالب

، ∵ ا = ٢٧ ، د = ٢٤,٥ − ٢٧ = − ٢,٥

∴ $ح_{ن}$ = ٢٧ + (ن − ١) × − ٢,٥

= ٢٩,٥ − ٢,٥ ن = $\frac{٥٩}{٢} - \frac{٥ ن}{٢}$

، $ح_{ن}$ يكون أكبر من الصفر عندما $\frac{٥٩}{٢} - \frac{٥ ن}{٢}$ > صفر

أى عندما $\frac{٥٩}{٢}$ > $\frac{٥ ن}{٢}$

أ، عندما ن < $\frac{٥٩ \times ٢}{٢ \times ٥}$ أى ن < ١١,٨

∴ فأول حد سالب هو الحد الثانى عشر وقيمته (− ٠,٥) .

ولما كانت ن عدد صحيح دائماً

∴ الحدود الموجبة فى هذه المتوالية = ١١ حداً فقط

ولإيجاد مجموع الحدود الموجبة نقول :

جـ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ ا + (ن − ١) د] ، حيث جـ = المجموع

∴ جـ = $\frac{١١}{٢}$ [٢ × ٢٧ + (١١ − ١) × − ٢,٥]

= ٥,٥ [٥٤ − ٢٥] = ٥,٥ × ٢٩ = ١٥٩,٥

٢ ـ أوجد رتبة أول حد سالب فى المتوالية :

٥٩ ، ٥٥ ، ٥١ ، .... وما قيمته

◀ الحـــل :

هنا الحد الأول ا = ٥٩

، الأساس د = ٥٥ − ٥٩ = ٥١ − ٥٥ = − ٤

∴ ح ن = ا + (ن − ١) د = ٥٩ + (ن − ١) × − ٤

= ٥٩ + ٤ − ٤ ن = ٦٣ − ٤ ن

وأول حد سالب يكون عندما ٦٣ − ٤ ن < صفر

أى إذا كان ٤ ن > ٦٣ أى عندما ن > ٦٣ / ٤

أى عندما ن > ١٥,٧٥

∴ أول حد سالب هو عندما ن = ١٦ ، أى الحد السادس عشر ،

ح ١٦ = ٥٩ + (١٦ − ١) × − ٤

= ٥٩ − ٦٠ = − ١

---

٣ ـ يتناقص إنتاج منجم للذهب سنوياً بحيث يكون الإنتاج فى سنة ما أقل ١٥٪ من السنة التى تسبقها فإذا كان إنتاج المنجم فى السنة الأولى = ٢٠٠٠ كجم من الذهب .

والمطلوب معرفة مجموع ما ينتجه المنجم فى العشرة سنين الأولى وما هو أقصى إنتاج يمكن الحصول عليه من هذا المنجم .

◀ الحـــل :

لما كانت الكمية التى ينتجها المنجم تقل سنوياً بمعدل ثابت (١٥٪) فإن الكميات التى ينتجها هذا المنجم تُمثل متوالية هندسية تناقصية .

وعلى هذا فمجموع الكميات المنتجة فى عشر سنوات :

[واضح أن الإنتاج فى أى سنة = ٨٥٪ من إنتاج السنة التى تسبقها (١٠٠٪ − ١٥٪)] .

جـ = ٢٠٠٠ + ٢٠٠٠ (٠,٨٥) + ٢٠٠٠(٠,٨٥)^{٢} + حتى عشرة حدود

، ∵ جـ = $\frac{ا[١-ر^{ن}]}{١-ر}$ حيث جـ = المجموع ، ا = الحد الأول (٢٠٠٠)

، ر = أساس المتوالية

= $\frac{\text{الحد الثانى}}{\text{الحد الأول}}$ = $\frac{٢٠٠٠ (٠,٨٥)}{٢٠٠٠}$ = ٠,٨٥

∴ جـ = $\frac{٢٠٠٠ [١ - (٠,٨٥)^{١٠}]}{١ - ٠,٨٥}$ =

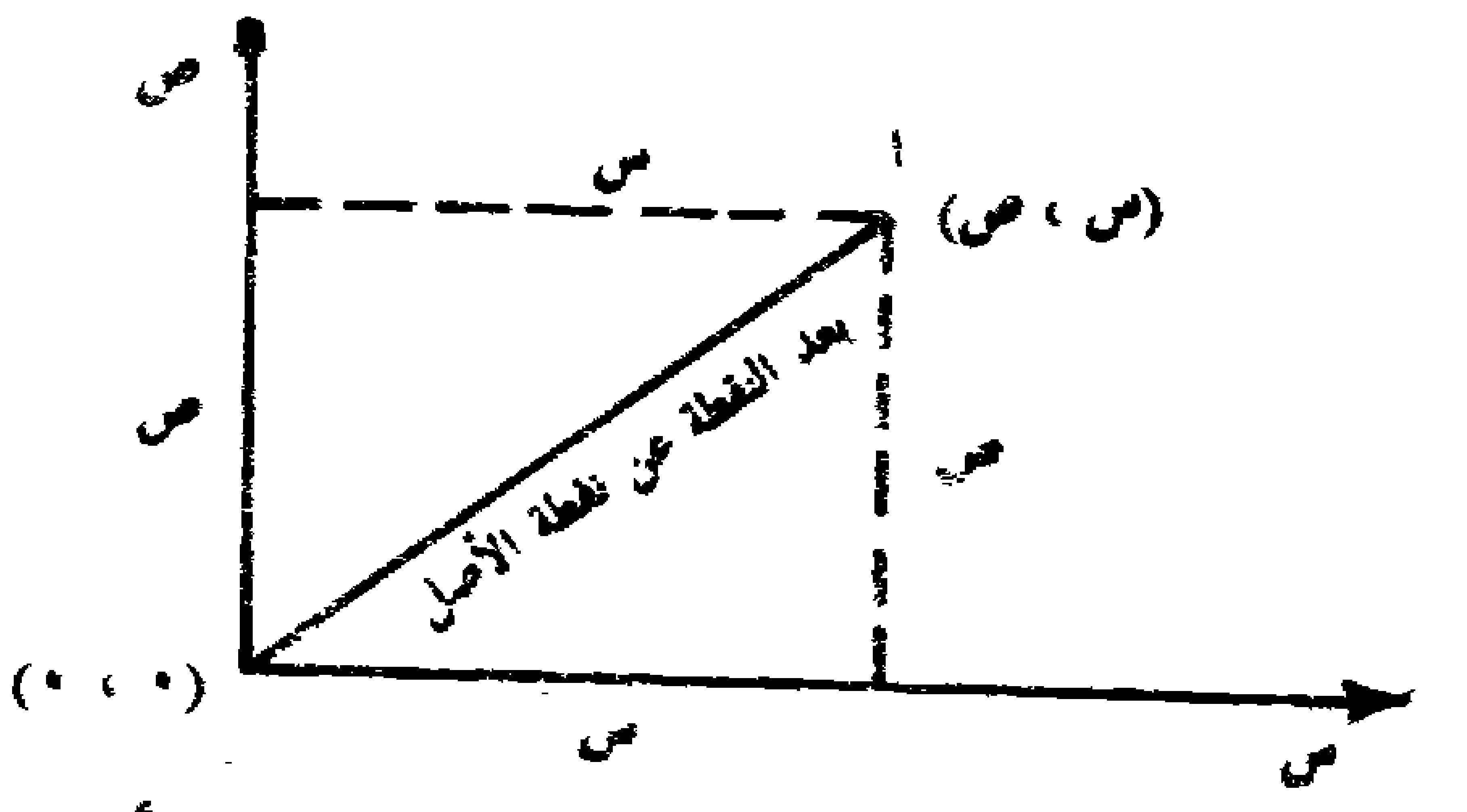
∴ جـ = $\frac{٢٠٠٠}{٠,١٥}$ [١ - ٠,١٩٧]

= $\frac{٢٠٠٠}{١٥}$ × $\frac{٨٠٣}{١٠٠٠}$ × ١٠٠ = ١٠٧٠٦,٦٦٧ كجم من الذهب

أى ما يزيد عن ١٠ طن ذهب .

٤ ـ ***كيف تثبت أن أبعاد النقط التى إحداثياتها (١ ، ٢) ، (٣ ، ٦) ، (٥ ، ١٠) ، عن نقطة الأصل (صفر ، صفر) ، تكوّن الثلاثة حدود الأولى من متوالية عددية .***

◄ **الحـــل :**



من المعلوم أن بعد أى نقطة إحداثياتها (س ، ص) عن نقطة الأصل هو $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ ، أنظر الشكل المرفق ، وعليه :

فإن النقطة الأولى بُعدها عن نقطة الأصل = $\sqrt{١ + ٤}$ = $\sqrt{٥}$ وحدة طول

، النقطة الثانية بُعدها عن نقطة الأصل = $\sqrt{٩ + ٣٦}$ = $\sqrt{٤٥}$ = ٣ $\sqrt{٥}$ وحدة طول

، النقطة الثالثة بُعدها عن نقطة الأصل = $\sqrt{٢٥ + ١٠٠}$ = $\sqrt{١٢٥}$ = ٥ $\sqrt{٥}$ وحدة طول

∴ أبعاد هذه النقط هى : $\sqrt{٥}$ ، ٣ $\sqrt{٥}$ ، ٥ $\sqrt{٥}$

وواضح أنها تكون متوالية عددية حدها الأول = $\sqrt{٥}$ ،

أساسها = $٣\sqrt{٥} - \sqrt{٥} = ٥\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥}$

•——••••• ——•

٥ ـ كيف يمكنك إثبات أن مجموع الزوايا الداخلية للمضلعات المنتظمة الآتية : المثلث والمربع والمخمس والمسدس ، تكون متتالية عددية .

◄ **الحـــل :**

من المعروف أن مجموع زوايا المثلث هى ١٨٠° أى [٢ ق]

كما وأن مجموع زوايا الشكل الرباعى هو ٣٦٠° أى [٤ ق]

وبالنسبة للشكل الخماسى فإن زاوية الرأس يمكن حسابها من القانون الآتى والذى يمكننا أن نُعين به زاوية رأس أى شكل هندسى منتظم :

زاوية الرأس = $\frac{(ن - ٢)}{ن} \times ١٨٠°$ حيث ن = عدد أضلاع الشكل

∴ زاوية رأس الشكل الخماسى = $\frac{(٥ - ٢)}{٥} \times ١٨٠ = ١٠٨°$

ومجموع زوايا الشكل المخمس = ٥ × ١٠٨ = ٥٤٠° = [٦ ق]

وبنفس القانون فإن :

زاوية رأس المسدس = $\frac{(٢ - ٦)}{٦} \times ١٨٠ = ١٢٠°$

ومجموع زوايا الشكل المسدس = ٦ × ١٢٠ = ٧٢٠° = [٨ ق]

وواضح أن : ٢ ق ، ٤ ق ، ٦ ق ، ٨ ق تكون متوالية عددية أساسها ٢ ق

•——••••• ——•

٦ ـ ثلاثة أشخاص مع كل منهم مبلغ ما بحيث أن هذه المبالغ تكّون متوالية عددية ومجموع هذه المبالغ = ٢١ جنيه . فإذا أضيف للمبلغ الأول ٤ جنيه وأضيف للمبلغ الثانى ٥ جنيه ثم أضفنا للمبلغ الثالث ٨ جنيه فإن المبالغ الثلاثة الباقية تكون فى توالٍ هندسى .

◀ **الحـــل :**

نفرض أن المبالغ هي : (ا − د) ، (ا) ، (ا + د) .

∴ (ا − د) + (ا) + (ا + د) = ٢١

∴ ٣ ا = ٢١ ∴ ا = ٧

∴ فمقادير هذه المبالغ كالتالى :

٧ − د ، ٧ ، ٧ + د

وبعد إضافة المبالغ المذكورة لكل منهم تُصبح كالتالى :

(٧ − د) + ٤ ، (٧) + ٥ ، (٧ + د) + ٨

∴ ١١ − د ، ١٢ ، ١٥ + د تكون فى توال هندسى

∴ (١١ − د) (١٥ + د) = $١٢^٢$ (من خواص المتواليء الهندسية)

∴ ١٦٥ − ٤ د − $د^٢$ = ١٤٤

∴ $د^٢$ + ٤ د − ٢١ = صفر

(د + ٧) (د − ٣) = صفر

∴ إما د + ٧ = صفر ومنها د = −٧

فتكون المبالغ : (ا − د) ، ا ، (ا + د) [حيث ا = ٧ ، د = −٧]

أى : (٧ + ٧) ، ٧ ، (٧ − ٧)

أى : ١٤ ، ٧ ، صفر وهذا الحل مرفوض

لأن كل من الثلاثة أشخاص لديه مبلغ ما أى أن ما مع الثالث ليس صفراً

وإما د = ٣ وعليه تكون المبالغ : ٧−٣ ، ٧ ، ٧+٣ أى ٤ ، ٧ ، ١٠

ومجموعها ٢١ ، فإذا أضفنا المبالغ المذكورة تصبح المبالغ كالتالى :

٤ + ٤ ، ٧ + ٥ ، ١٠ + ٨

أى : ٨ ، ١٢ ، ١٨

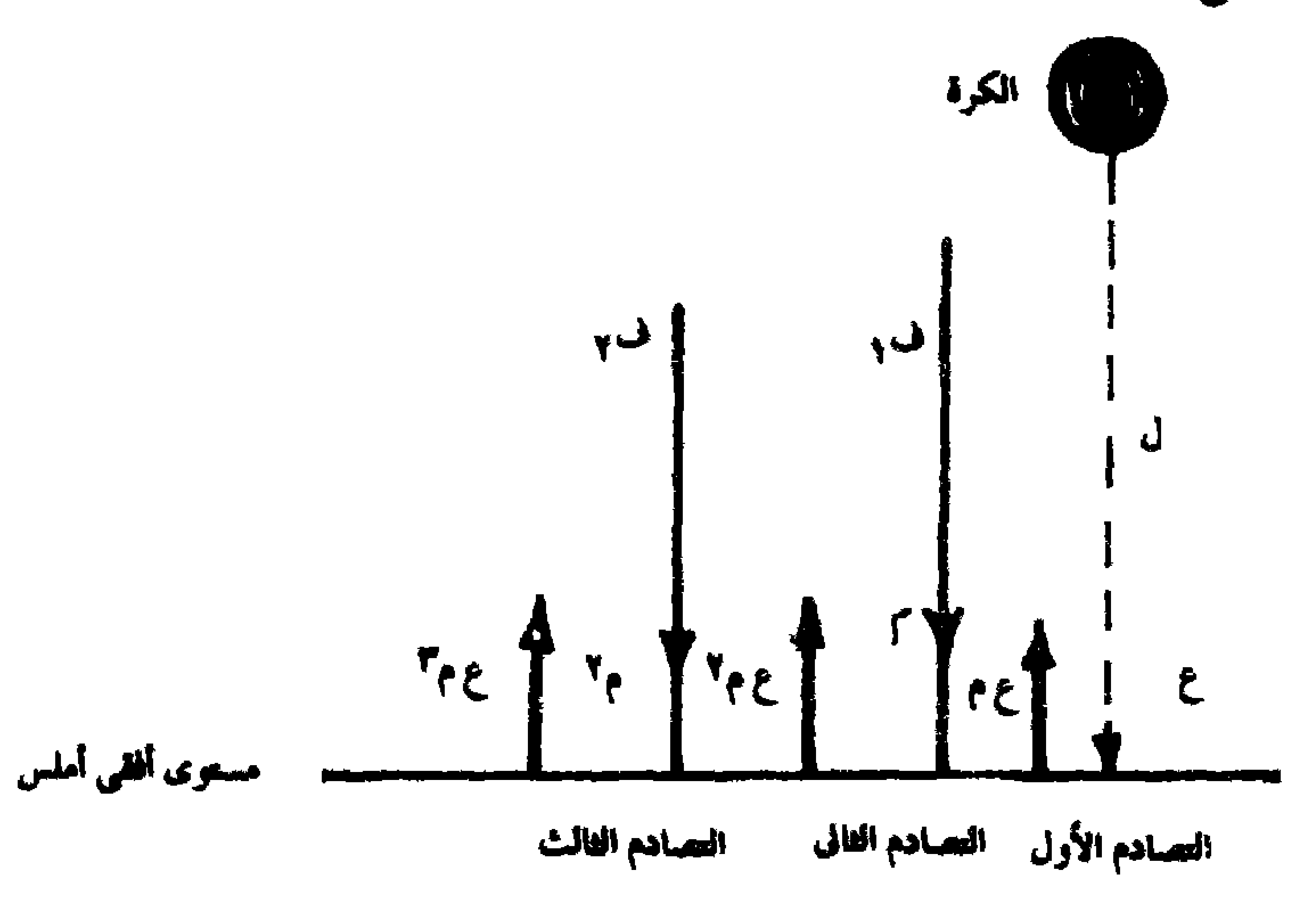
حيث $\frac{١٢}{٨} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$ وهو أساس المتوالية الهندسية .

٧ ـ سقطت كرة من المطاط رأسياً لأسفل نحو مستوى أفقى أملس فهل يمكن حساب مجموع المسافات الرأسية التى تحركتها الكرة حتى تسكن تماماً ؟

ثم أثبت أنها تساوى : [ل ($\frac{١ + م^٢}{١ - م^٢}$)]

حيث ل هى المسافة التى سقطت فيها الكرة وهى تساوى ٤٩ متراً . ، م = معامل إرتداد الكرة = $\frac{١}{٢}$ ، احسب كذلك مجموع الأزمنة إلى أن تقف الكرة .

◄ الحـــل :



إذا فرضنا أن سرعة الكرة لحظة إصطدامها بالأرض لأول مرة ع ، فإنها ترتد لأول مرة بسرعة مقدارها ع × م حيث ترتفع لأعلى مسافة رأسية مقدارها $ف_١$ ثم تعاود الإصطدام بسرعة ع × م فترتد لأعلى بسرعة ع × $م^٢$ وهكذ .

ويكون مجموع المسافات الرأسية التى تتحركها الكرة حتى تقف هو :

$$ف = ل + ٢ ف_١ + ٢ ف_٢ + ٢ ف_٣ + ... + ف_{\infty}$$

، $ع^٢ = ع^٢_{صفر} + ٢ جـ ف$

حيث ع سرعة الكرة فى أى لحظة ، $ع_{صفر}$ سرعة السقوط الابتدائية ، جـ عجلة الجاذبية الأرضية ، ف المسافة التى تسقطها الكرة

$∴ ع^٢ = صفر + ٢ جـ ف$

$∴ ع = \sqrt{٢ جـ ف} = \sqrt{٢ جـ ل}$

(وهى سرعة الاصطدام بالأرض لأول مرة)

ويمكن حساب قيمة المسافة $ف_١$ كالتالى :

$∴ ع^٢ = ع^٢_{صفر} + ٢ جـ ف$ [السرعة النهائية عند أقصى ارتفاع ع = صفر]

$∴ صفر = م^٢ (٢ جـ ل) - ٢ جـ ف_١$ .....

[إشارة سالب ، لصعود الكرة ، سرعة الصعود لأول مرة = م ع]

$∴ ف_١ = م^٢ ل$

وبنفس الطريقة يمكن حساب $ف_٢$

$ف_٢ = م^٤ ل$ $ف_٣ = م^٨ ل$ ،... إلخ .

وعلى هذا فإن مجموع المسافات الرأسية :

$ف = ل + ٢ م^٢ ل + ٢ م^٤ ل + ٢ م^٨ ل + ...$

$= ل + ٢ [م^٢ ل + م^٤ ل + م^٨ ل + ... + م^{\infty} ل]$

ويلاحظ أن المقدار بين القوسين عبارة عن متوالية هندسية لا نهائية .

حدها الأول $(م^٢ ل)$ وأساسها $= م^٢ = \frac{م^٤ ل}{م^٢ ل}$

وبالتالى فإن مجموعها إلى مالا نهاية يمكن حسابه بالقانون : $جـ = \frac{١}{١ - ر}$

حيث جـ = المجموع ، ا = الحد الأول ، ر = الأساس

$∴$ فمجموعها $= \frac{م^٢ ل}{١ - م^٢}$

$∴ ف_{الكلية} = ل + ٢ \frac{م^٢ ل}{[١ - م^٢]} = \frac{ل [١ + م^٢]}{[١ - م^٢]}$ .... (١)

ولحساب الزمن الذى تستقر بعده الكرة نقول :

$\therefore$ ف = ع$_{صفر}$ ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢} [ن$_{١}$ = زمن سقوط الكرة لأول مرة]

$\therefore$ ل = صفر = $\frac{١}{٢}$ جـ ن$_{١}^{٢}$

$\therefore$ ن$_{١}$ = $\sqrt{\frac{٢ ل}{جـ}}$

وبنفس الطريقة : ن$_{٢}$ = ٢م $\sqrt{\frac{٢ ل}{جـ}}$ ، ن$_{٣}$ = ٢ م^{٢} $\sqrt{\frac{٢ ل}{جـ}}$

$\therefore$ ن = ن$_{١}$ + ن$_{٢}$ + ... + ∞

= $\sqrt{\frac{٢ ل}{جـ}}$ [١ + ٢ م + ٢ م^{٢} + ... + ٢ م$^{\infty}$]

= $\sqrt{\frac{٢ ل}{جـ}}$ + $\sqrt{\frac{٢ ل}{جـ}}$ [٢ م + ٢ م^{٢} + ... + ٢ م$^{\infty}$]

وبنفس الطريقة فإن المجموع بين القوسين هو متوالية هندسية لا نهائية حدها الأول ا = ٢ م وأساسها ر = $\frac{٢ م^{٢}}{٢ م}$ = م

$\therefore$ مجموعها = $\frac{٢ م}{١ - م}$

$\therefore$ ن = $\sqrt{\frac{٢ ل}{ج}}$ [١ + $\frac{٢ م}{١ - م}$] = $\sqrt{\frac{٢ ل}{جـ}}$ [$\frac{١ - م + ٢ م}{١ - م}$]

$\therefore$ ن = $\sqrt{\frac{٢ ل}{ج}}$ [$\frac{٢ م}{١ - م}$] .... (٢)

فإذا فرضنا أن ل = ٤٩ متراً مثلاً وأن معامل الارتداد م = ٠,٥ .

$\therefore$ من المعادلة (١) :

ف = ٤٩ [$\frac{١ + ٠,٢٥}{١ - ٠,٢٥}$] = ٤٩ × $\frac{١,٢٥}{٠,٧٥}$ = ٨١,٦٦ متراً

، ن من المعادلة (٢) :

ن = $\sqrt{\frac{٢ \times ٤٩}{٩,٨}}$ ($\frac{١ + ٠,٥}{١ - ٠,٥}$) = ٣ $\sqrt{١٠}$ $\cong$ ٩,٤٩ ثانية .

٨ ـ سقطت كرة من إرتفاع ٦٤ متراً فاصطدمت بالأرض وعادت مرتدة لأعلى لمسافة $\frac{3}{4}$ المسافة التى سقطتها ثم عادت للسقوط والإرتداد إلى أن سكنت وفى كل مرة ترتد لأعلى مسافة تساوى $\frac{3}{4}$ المسافة التى سقطتها ومطلوب منك أن تحسب المسافة التى سقطتها الكرة عند اصطدامها بالأرض للمرة الثامنة ، كذلك يراد معرفة مجموع المسافات التى تحركتها الكرة منذ لحظة سقوطها وحتى سكونها .

الحـــل :

∵ الكرة تسقط من إرتفاع ٦٤ متراً وعند إرتدادها لأعلى فإنها ترتد لمسافة $= 64 \times (\frac{3}{4})$ متراً ثم عند سقوطها للمرة الثانية تعود فترتد لمسافة $= [\,64 \times (\frac{3}{4})\,] \times (\frac{3}{4}) = 64 \times (\frac{3}{4})^2$

وفى المرة الثالثة ترتد لمسافة $= 64 \times (\frac{3}{4})^3$ ، وهكذا ...

وفى المرة الثامنة فإنها ترتد لمسافة $= 64 \times (\frac{3}{4})^8 = 4^3 \times \frac{3^8}{4^8}$

$= \frac{3^8}{4^5} = \frac{6561}{1024} \simeq 6,41$ متراً

أما مجموع المسافات التى تقطعها حتى تستقر :

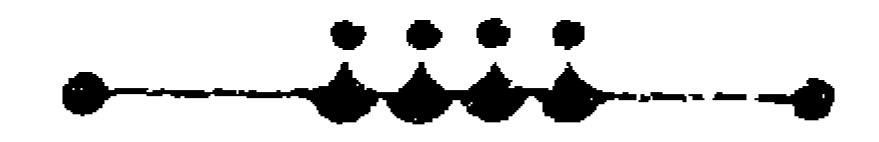
$= 64 + 2\,[\,64 \times \frac{3}{4}\,] + 2\,[\,64 \times (\frac{3}{4})^2\,] + \ldots + \infty$

$= 2\,[\,64 + 64 \times (\frac{3}{4}) + 64 \times (\frac{3}{4})^2 + \ldots \infty\,] - 64$

والمقدار فيما بين القوسين يُمثل متوالية هندسية لانهائية حدها الأول = ٦٤ وأساسها = $\frac{3}{4}$ ؛

∴ فمجموعها $= \frac{64}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{64}{0,25} = 256$

∴ مجموع المسافات $= 2\,(256) - 64 = 512 - 64 = 448$ متراً



٩ ـ عاملان بدأ كل منهما العمل بمرتب سنوى قدره ٨٤٠ جنيهاً ، وكان الأول يحصل على علاوة سنوية ثابتة قدرها = ١٥ جنيهاً بينما الثانى يحصل على علاوة سنوية قدرها ٤٪ من مرتبه فى السنة السابقة ،

والمطلوب حساب مرتب كل منهما فى السنة الثلاثين من بدء عملهم ، وكم يجب أن تكون العلاوة السنوية للأول حتى يتساوى مرتبه مع مرتب زميله فى تلك السنة وما مجموع الأجور التى تقاضاها كل منهما فى هذه المدة .

◀ الحـــل :

إذا نظرتا إلى مرتبات الأول على مدار السنوات نجدها كالتالى :

فى السنة الأولى = ٨٤٠

فى السنة الثانية = (٨٤٠ + ١٥)

فى السنة الثالثة = (٨٤٠ + ١٥) + ١٥ ، وهكذا ..

نجدها تمثل متواليـة عددية حدها ا = ٨٤٠ وأساسها د = ١٥

بينما مرتبات الثانى تكون كالتالى :

فى السنة الأولى = ٨٤٠

فى السنة الثانية = $٨٤٠ \times \frac{١٠٤}{١٠٠}$

فى السنة الثالثة = $(٨٤٠ \times \frac{١٠٤}{١٠٠}) \times \frac{١٠٤}{١٠٠}$

= $٨٤٠ \times (\frac{١٠٤}{١٠٠})^{٢}$ ، وهكذا..

نجدها تمثل متوالية هندسية حدها الأول ا = ٨٤٠ وأساسها ر = ١,٠٤

∴ مرتب الأول فى السنة الثلاثين من بدء عمله .

ح٣٠ = ا + ٢٩ د = ٨٤٠ + ٢٩ × ١٥ = ٨٤٠ + ٤٣٥

= ١٢٧٥ جنيهاً [أى ١٠٦,٢٥ جنيه شهرياً]

بينما مرتب الثانى = $\bar{ح}_{٣٠}$ = ا $ر^{٢٩}$ = ٨٤٠ × $(١,٠٤)^{٢٩}$ = ٨٤٠ × ٣,١١٩

≃ ٢٦١٩ جنيهاً أى [٢١٨,٢٥ جنيه شهرياً]

ولكى يكون مرتب الأول فى السنة الثلاثين $ح_{٣٠}$ مساوياً لمرتب الثانى فى السنة الثلاثين $\bar{ح}_{٣٠}$ فإن :

٨٤٠ + ٢٩ د لابد وأن تساوى = ٢٦١٩

∴ ٢٩ د = ٢٦١٩ − ٨٤٠ = ١٧٧٩

∴ د = $\frac{١٧٧٩}{٢٩}$ = ٦١,٣٥ جنيهاً

أى يجب أن يزيد مرتب الأول سنوياً بمقدار ٦١,٣٥ جنيهاً لكى يتساوى مرتبهما فى السنة الثلاثين (فقط) .

ولحساب الأجور التى تقاضاها الأول خلال ٣٠ عاماً :

∴ جـ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ ا + (ن − ١) د] حيث ن = ٣٠ عاماً .

∴ جـ = $\frac{٣٠}{٢}$ [٢ × ٨٤٠ + ٢٩ × ١٥]

= ١٥ [١٦٨٠ + ٤٣٥] = ١٥ [٢١١٥] ≃ ٣١٧٢٥ جنيهاً .

بينما مجموع أجور الثانى :

جـ = $\frac{ا \, ر^{ن} - ١}{ر - ١}$ = $\frac{٨٤٠ \, [(١,٠٤)^{٣٠} - ١]}{١,٠٤ - ١}$

= ٨٤٠ $\frac{[٣,٢٤٣ - ١]}{٠,٠٤}$

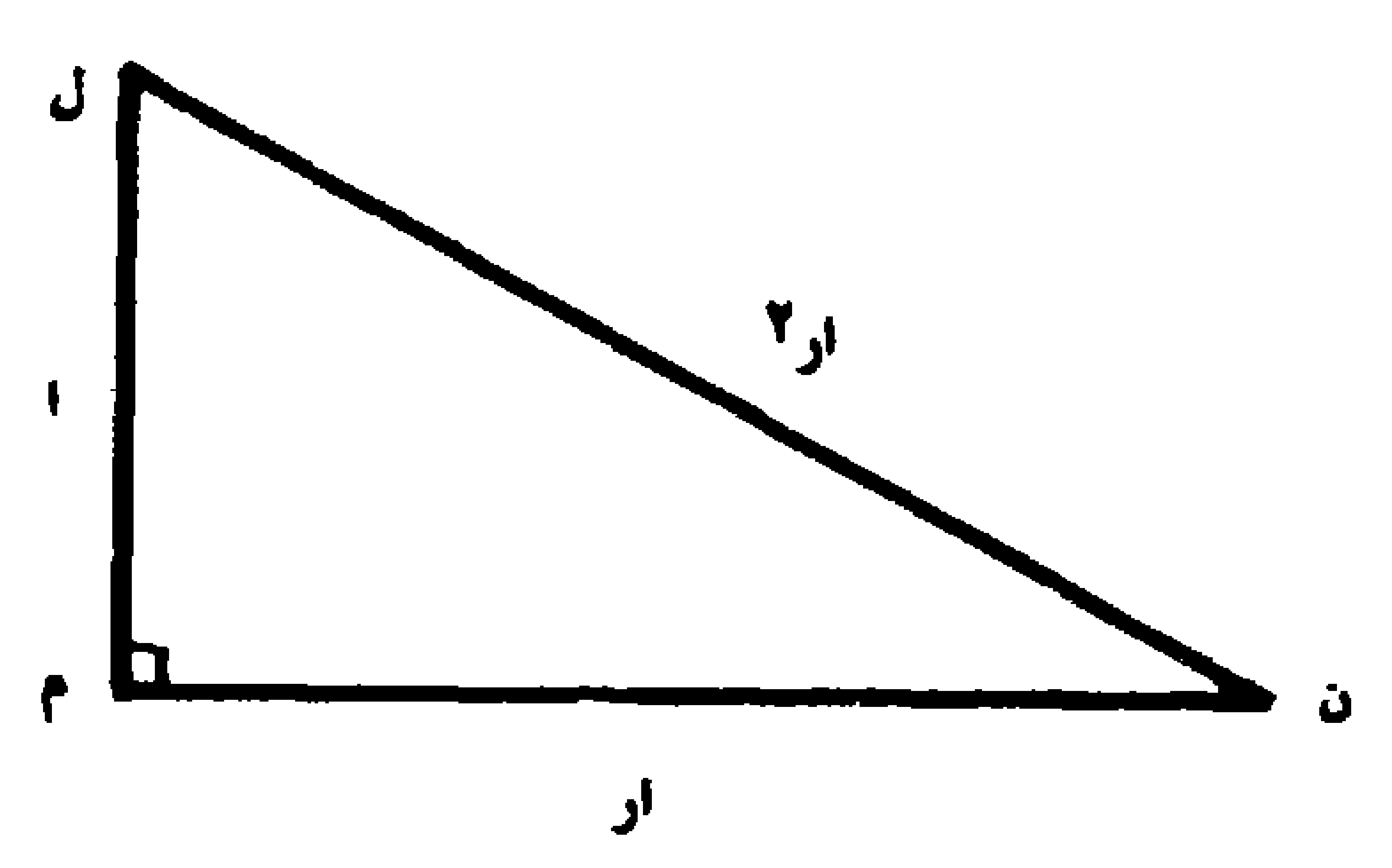
= ٨٤٠ × $\frac{٢,٢٤٣}{٠,٠٤}$ ≃ ٤٧١١١ جنيهاً

والفرق بين دخليهما خلال ٣٠ عاماً =

٤٧١١١ − ٣١٧٢٥ = ١٥٣٨٦ جنيهاً

١٠ ـ إذا كانت أطوال أضلاع مثلث ل م ن القائم الزاوية فى م تكّون متوالية هندسية ، فالمطلوب هو حساب جيوب الزوايا الحادة فى هذا المثلث .

◀ الحـــل :



نفرض أطوال الأضلاع هى ا ، ار ، $ا\,ر^{٢}$

ومن هندسة الشكل $\therefore (ا\,ر^{٢})^{٢} = ا^{٢} + (ا\,ر)^{٢}$

$\therefore ا^{٢}ر^{٤} = ا^{٢} + ا^{٢}ر^{٢}$ $\qquad \therefore ا^{٢}ر^{٤} - ا^{٢}ر^{٢} - ا^{٢} =$ صفر

$\therefore ر^{٤} - ر^{٢} - ١ =$ صفر

ويوضع $ر^{٢} = ك$ $\qquad \therefore$ المعادلة تصبح $ك^{٢} - ك - ١ =$ صفر

وهى معادلة من الدرجة الثانية فى ك ويمكن إيجاد قيمتى ك باستخدام القانون :

$$\therefore ك = \frac{-(-١) \pm \sqrt{١ - ٤ \times ١ \times -١}}{٢ \times ١} = \frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$$

$$= \frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$$ والقيمة الأخرى السالبة مرفوضة بالطبع .

$$\therefore ر^{٢} = \frac{١ + \sqrt{٥}}{٢} \text{ ، } ر = \sqrt{\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}}$$

وعليه فإن جيب زاوية ل $= \dfrac{ا\,ر}{ا\,ر^{٢}} = \dfrac{١}{ر} = \dfrac{١}{\sqrt{\dfrac{١+\sqrt{٥}}{٢}}}$

$$= \sqrt{\frac{٢}{١ + \sqrt{٥}}}$$

، جيب زاوية ن $= \dfrac{ا}{ا\,ر^{٢}} = \dfrac{١}{ر^{٢}} = \dfrac{٢}{١ + \sqrt{٥}}$

١١ـ رُصت مجموعة من الكرات المتساوية حجماً على شكل مثلث ، بحيث يحتوى الصف الأول على كرة واحدة والصف الثانى على كرتين والصف الثالث على ثلاث كرات ، ... وهكذا ،

المطلوب هو حساب عدد الصفوف إذا كان العدد الكلى للكرات المرصوصة هو ١٢٠ كرة وكذلك عدد الكرات بالصف الأخير .

◀ الحـــل :

من الواضح أن أعداد الكرات فى الصفوف تمثل متوالية عددية حدها الأول = ا = ١ وأساسها د = ١ كذلك ،

، ∵ مجموع الكرات = ١٢٠ كرة

، ∵ $\text{جـ} = \frac{\text{ن}}{\text{٢}} [\,\text{٢ ا} + (\text{ن} - \text{١})\,\text{د}\,]$ ، حيث ن = عدد الصفوف (الحدود)

$$\therefore \text{١٢٠} = \frac{\text{ن}}{\text{٢}} [\,\text{٢} \times \text{١} + (\text{ن} - \text{١}) \times \text{١}\,] = \frac{\text{ن}}{\text{٢}} [\,\text{ن} + \text{ن}\,]$$

$$\therefore \text{ن}^{\text{٢}} + \text{ن} - \text{٢٤٠} = \text{٠}$$

$$(\text{ن} + \text{١٦})\,(\text{ن} - \text{١٥}) = \text{صفر}$$

$\therefore$ ن = ١٥ صفاً .

ومن المنطقى أن عدد الكرات فى كل صف مساوى لرتبة الصف . أى أن عدد الكرات بالصف الخامس عشر = خمسة عشر كرة

أ، يمكن حسابها كالتالى :

$$\text{ح}_{\text{١٥}} = \text{ا} + (\text{ن} - \text{١})\,\text{د} = \text{١} + (\text{١٥} - \text{١}) \times \text{١}$$

= ١ + ١٤ = ١٥ كرة ، وهو مايؤكد الإجابة السابقة

١٢ـ رُصت مجموعة من الكرات المتماثلة لتكون مثلثاً متساوى الأضلاع بحيث يحتوى الصف الأول على كرة واحدة والصف الثانى على كرتين والصف الثالث على ثلاث كرات ، وهكذا .

وإذا أضفنا ٦٦٩ كرة أخرى ، كونت هذه الكرات مربعاً يحتوى كل حرف منه على ٨ كرات أقل من عدد الكرات الموجودة فى ضلع المثلث المتساوى الأضلاع ، فأوجد عدد الكرات فى الحالة الأولى .

◀ **الحـــل :**

فى الحالة الأولى يكون عدد الكرات فى الصفوف عبارة عن متوالية عددية حدها الأول ا = ١ وأساسها = ١ كذلك .

∴ فمجموع الكرات = $\text{جـ} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢\,\text{ا} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}\right]$

$$\text{جـ} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢ + \text{ن} - ١\right] = \frac{\text{ن}}{٢}\left[\text{ن} + ١\right] \text{ كرة} \qquad ...(١)$$

وبإضافة ٦٦٩ كرة لهذا المجموع يصبح عدد الكرات :

$$\left[\frac{\text{ن}}{٢}(\text{ن} + ١) + ٦٦٩\right] \text{ كرة} \qquad ......(٢)$$

، ∵ عدد الكرات فى ضلع المثلث يكون مساوياً لعدد الصفوف =ن ويكون المجموع فى المعادلة الثانية مربعاً كاملاً طول ضلعه يساوى (ن − ٨) ، ويكون عدد الكرات فى هذا المربع :

$$= (\text{ن} - ٨) \times (\text{ن} - ٨) = (\text{ن} - ٨)^{٢} \qquad ....(٣)$$

وحيث أن عدد الكرات فى (٢) هو نفسه فى المعادلة (٣) ،

$$\therefore \frac{\text{ن}}{٢}(\text{ن} + ١) + ٦٦٩ = (\text{ن} - ٨)^{٢}$$

$$\therefore \text{ن}^{٢} + \text{ن} + ١٣٣٨ = ٢\,\text{ن}^{٢} - ٣٢\,\text{ن} + ١٢٨$$

$$\therefore \text{ن}^{٢} - ٣٣\,\text{ن} - ١٢١٠ = \text{صفر}$$

$$\therefore (\text{ن} - ٥٥)(\text{ن} + ٢٢) = \text{صفر}$$

∴ ن = ٥٥ صفاً .

∴ عدد الكرات فى الحالة الأولى ، من المعادلة (١) يكون مساوياً :

$$\frac{\text{ن}}{٢}(\text{ن} + ١) = \frac{٥٥}{٢} \times ٥٦ = ١٥٤٠ \text{ كرة .}$$

١٣ ـ عدد مكون من ٣ أرقام تكون متوالية عددية ، وعند قسمة هذا العدد على العدد المكون من مجموع أرقامه يكون الناتج = ٤٨

والفرق بين هذا العدد وبين العدد المكون من نفس الأرقام عند كتابتها بعكس الترتيب الأول = ١٩٨ .

المطلوب هو معرفة العدد .

◄ **الحـــل :**

نفرض أن رقم الآحاد بهذا العدد = ا

∴ رقم العشرات = ا + د

، رقم المئات = ا + ٢ د

وذلك لأن أرقام العدد تُكّون متوالية عددية

∴ قيمة هذا العدد = ا + (ا + د) × ١٠ + (ا + ٢ د) × ١٠٠

= ١١١ ا + ٢١٠ د ....(١)

، مجموع أرقام هذا العدد = (٣ ا + ٣ د) (وهو عدد جديد)

$$\therefore \frac{١١١ ا + ٢١٠ د}{٣ ا + ٣ د} = ٤٨$$

∴ ١١١ ا + ٢١٠ د = ١٤٤ ا + ١٤٤ د

∴ ٦٦ د = ٣٣ ا

ومنها ∴ ا = ٢ د ....(٢)

والعدد المكون من نفس أرقام العدد الأصلي ولكن بصورة معكوسة هو :

= (ا + ٢ د) + (ا + د) × ١٠ + ا × ١٠٠

= ١١١ ا + ١٢ د ....(٣)

وبطرح المعادلة (٣) من المعادلة (١) :

∴ ١١١ ا + ٢١٠ د − (١١١ ا + ١٢ د) = ١٩٨

∴ ١٩٨ د = ١٩٨   ∴ د = ١

ومن المعادلة (٢) :

∴ ا = ٢ د = ٢ × ١ = ٢

∴ أرقام العدد الأصلى هى ا = ٢ ، ا + د = ٣ ، ا + ٢ د = ٤

∴ العدد الأصلى هو ٤٣٢

، $\frac{٤٣٢}{٢ + ٣ + ٤} = \frac{٤٣٢}{٩} = ٤٨$ ، ٤٣٢ − ٢٣٤ = ١٩٨

١٤– وزع مبلغ من المال على ثمانية أشخاص ، بحيث يأخذ الأول مبلغاً قدره جنيهان ، ويأخذ الثانى نصيباً يزيد عن نصيب الأول ، بنفس مقدار زيادة الثالث عن الثانى ، ..... ، بنفس مقدار زيادة الثامن عن السابع .

وكان نصيب الثانى ونصيب الثالث ، كل منهما يعادل مربع كامل لرقمين متتاليين ، فما جملة المبلغ الذى تم توزيعه وما نصيب الشخص الثامن .

◀ **الحـــل :**

واضح من المسألة أن المبالغ التى يأخذها الأشخاص من الأول وحتى الثامن تكون فى توالٍ عددى والحد الأول فى هذه المتوالية هو نصيب الأول = ٢ جنيه والأساس مجهول وليكن = د

وحيث أن نصيب الثانى = ٢ + د

، وحيث أن نصيب الثالث = ٢ + ٢ د

وكل منهما يعادل مربع كامل لرقمين متتاليين وليكن الرقمين ن ، ن + ١

∴ ٢ + د = $ن^٢$ ..... (١)

، ٢ + ٢ د = $(ن + ١)^٢$ ..... (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ د = ($ن^٢$ − ٢)

، ٢ + ٢ ($ن^٢$ − ٢) = $ن^٢$ + ٢ ن + ١

$\therefore$ ٢ + ٢ ن٢ − ن٢ − ٤ − ٢ ن − ١ = صفر

$\therefore$ ن٢ − ٢ ن − ٣ = صفر

(ن − ٣) (ن + ١) = صفر ، ومنها

$\therefore$ ن = ٣ ، ن = −١ وتُرفض الإجابة السالبة بالطبع

$\therefore$ ن = ٣ ، من المعادلة (١) : ٢ + د = ٩ $\therefore$ د = ٩ − ٢ = ٧

$\therefore$ د = ٧

$\therefore$ الأنصبة هى كالتالى : ٢ ، ٩ ، ١٦ ،..... ، ٥١

ومجموع الأنصبة حتى الثامن : جـ = $\frac{\text{ن}}{٢}$ [٢ ا + (ن − ١) د]

$\therefore$ جـ = $\frac{٨}{٢}$ [٢ × ٢ + (٨ − ١) × ٧]

= ٤ [٤ + ٤٩] = ٢١٢ جنيهاً .

، نصيب الثامن = ح٨ = ا + (ن − ١) × د = ٢ + ٧ × ٧ = ٥١ جنيهاً

---

١٥ ـ متوالية هندسية مجموعها إلى ما لا نهاية من الحدود = ١٣.٥ ، وأى حد فيها يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له بأجمعها ، فأوجد المتوالية ومجموع حدودها التسعة الأولى وما الفرق بين مجموعها إلى مالا نهاية ومجموع التسعة حدود الأولى .

◄ **الحـــل :**

نفرض أن الحد الأول فى هذه المتوالية هو ا وأن الأساس = ر

$\therefore$ مجموعها إلى مالا نهاية جـ = $\frac{\text{ا}}{١ - \text{ر}}$ = $\frac{٢٧}{٢}$ ......(١)

، $\therefore$ أى حد فى هذه المتوالية يساوى ضعف مجموع الحدود الباقية إلى مالا نهاية :

$\therefore$ ا = ٢ [ا ر + ا ر٢ + ا ر٣ + ... + ا ر$^{\infty}$] ......(٢)

والمقدار فيما بين القوسين يمثل متوالية هندسية لا نهائية حدها الأول = ا ر
وأساسها = ر

∴ فمجموعها = $\frac{\text{الحد الأول}}{\text{١ − الأساس}}$

∴ مجموعها = $\frac{\text{ا ر}}{\text{١ − ر}}$

∴ من المعادلة الثانية : ا = ٢ × $\frac{\text{ا ر}}{\text{١ − ر}}$

∴ ١ − ر = ٢ ر ومنها ∴ ر = $\frac{١}{٣}$ ......(٣)

والتعويض عن قيمة ر من المعادلة (٣) فى المعادلة (١) :

∴ $\frac{\text{ا}}{١ - (\frac{١}{٣})} = \frac{٢٧}{٢}$

∴ $\frac{\text{٣ ا}}{٢} = \frac{٢٧}{٢}$ ومنها ∴ ا = ٩ ......(٤)

، من (٣) ، (٤) ∴ المتوالية تكون كالتالى :

٩ ، ٣ ، ١ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، ..... ∞

ومجموع التسعة حدود الأولى جـ٩ = $\frac{\text{ا} [١ - \text{ر}^{\text{ن}}]}{\text{١ − ر}}$ (لأن ر < ١)

∴ جـ٩ = $\frac{٩ [١ - (\frac{١}{٣})^{٩}]}{١ - \frac{١}{٣}}$

$= \frac{٢٧}{٢} [١ - ٣^{-٩}] = \frac{٢٧}{٢} - \frac{٣^{-٩} \times ٣^{٣}}{٢٢}$

$= \frac{٢٧}{٢} - \frac{٣^{-٦}}{٢} = \frac{٢٧}{٢} - \frac{١}{٢٧ \times ٢٧ \times ٢}$

$= (\frac{٢٧}{٢} - \frac{١}{١٤٥٨})$

١٦ ـ ما هو الشرط اللازم لكى يكون مجموع متوالية حسابية مساوية لعدد حدودها .

◀ **الحـــل :**

المتوالية الحسابية تكون فى الصورة ا ، ا + د ، ا + ٢ د ، .... ، ل

حيث ا = الحد الأول ، د = الأساس ، ل = الحد الأخير ، ن = عدد الحدود

ويكون مجموع هذه المتوالية بدلالة الحد الأخير والحد الأول :

$$\text{جـ} = \frac{\text{ن}}{٢} (\text{ا} + \text{ل})$$

وحتى تكون جـ مساوية لـ ن فإننا نضع ن بدلاً من جـ فى المعادلة السابقة :

$$\therefore \text{ن} = \frac{\text{ن}}{٢} (\text{ا} + \text{ل}) \quad \text{ومنها : ا} + \text{ل} = ٢$$

وهذا هو الشرط اللازم أى يجب أن يكون مجموع كلاً من حديها الأول والأخير مساوياً ٢ دائماً ، وكمثال المتوالية التالية :

٠,٤ ، ٠,٦ ، ٠,٨ ، ١ ، ١,٢ ، ١,٤ ، ١,٦

حدها الأول = ٠,٤ حدها الأخير = ١,٦ أساسها = ٠,٢

مجموع حدودها = ٧ عدد حدودها = ٧

، مجموع حديها الأول والأخير = ٢ = ٠,٤ + ١,٦

---

١٧ ـ كيف يمكنك إيجاد قيمة الكسر الآتى : $\dfrac{١٦ + ١٢ + ٩ + \ldots + \infty}{١ + \frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٩} + \ldots + \infty}$

◀ **الحـــل :**

واضح أن هذا الكسر عبارة عن متوالية هندسية لا نهائية بسطاً ومقاماً

ولما كان مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية = $\frac{\text{الحد الأول}}{١ - \text{الأساس}}$

، بالنسبة لمتوالية البسط فحدها الأول ١٦

وأساسها = $\frac{١٢}{١٦} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

، بالنسبة لمتوالية المقام فحدها الأول ١

، وأساسها = $\frac{\frac{٢}{٣}}{١} = \frac{\frac{٤}{٩}}{\frac{٢}{٣}} = \frac{٢}{٣}$

∴ قيمة هذا الكسر = $\frac{\frac{١٦}{١ - \frac{٣}{٤}}}{\frac{١}{١ - \frac{٢}{٣}}} = \frac{٦٤}{٣}$

١٨ـ فى أحد أنواع الفئران كان التكاثر يتم بحيث أن كل أنثى تضع ٨ فئران نصفهم من الإناث ، والمطلوب منا معرفة إنتاج أربعة أزواج [٤ ذكور ، ٤ إناث] عبر عشرة أجيال (حوالى عام) وعلى اعتبار أن التكاثر يتم فقط بين فئران الجيل الواحد .

◀ **الحـــل :**

من المعروف أن كثير من الحيوانات يتم التكاثر فيما بين الآباء والأبناء والأحفاد ففى حالة الفئران مثلاً يحدث بالطبع أن يتكاثر فأر من الجيل الرابع مثلاً مع فأره من الجيل الثانى أو الثالث مما يزيد من تعقيد العملية وصعوبة حسابها ولهذا فإننا نبسط العملية باعتبار أن التكاثر يتم بين فئران الجيل الواحد فقط .

وفى مسألتنا هذه فإن الفئران فى كل جيل تُكوّن متوالية هندسية أساسها = ٤ [كل زوج يتكاثر يُعطى ٤ أزواج]

، عدد الأجيال = عدد حدود المتوالية = ١٠

والحد الأول للمتوالية أى عدد الفأرات الإناث التى سيبدأ التكاثر بالنسبة لها = ٤

$$\text{، ∵ جـ} = \text{ا}\ \frac{\text{ر}^{\text{ن}} - ١}{\text{ر} - ١}$$

$$\text{∴ جـ} = ٤ \times \frac{٤^{١٠} - ١}{٤ - ١} \simeq \frac{٤}{٣} \times ١٠٤٨٥٧٥ = ١٣٩٨١٠٠$$

أى ما يعادل ١,٤ مليون فأر تقريباً .

وبالطبع فإن قدرة الله تعالى ، لا تسمح بنمو هذا العدد المخيف فهنالك حيوانات تتغذى على الفئران بالإضافة للأمراض والظروف البيئية وغيرها لا تسمح بالنمو بمثل هذا المعدل ، ولك أن تتصور لو ابتدأ التكاثر بألف أنثى فقط ولا نقول ملايين فبهذا المعدل يمكن لجنس الفئران أن يغطى الكرة الأرضية تماماً وبتكدس مخيف لا يبقى ولا يذر . فسبحان الله والحمد لله .

١٩ـ يراد تقسيم ٧٨٠ جنيهاً على ستة إخوة ، بحيث يأخذ الثانى مقداراً يزيد عما يأخذه الأول ويأخذ الثالث نفس المقدار زيادة عن الثانى .

وهكذا فالرابع يزيد عن الثالث والخامس عن الرابع والسادس عن الخامس وبحيث يكون ما يأخذه الثلاثة الأوائل $\frac{٥}{٨}$ ما يأخذه الثلاثة الآخرين .

◀ الحـــل :

نفرض أن ما يأخذه الأول = س جنيهاً .

، ∴ مقدار ما يأخذه الثانى = س + ص جنيهاً .

، نفرض مقدار ما يأخذه الثالث = س + ٢ ص جنيهاً .

وهكذا ، حتى يأخذ السادس ما مقداره : س + ٥ ص جنيهاً .

∴ س + (س + ص) ع (س + ٢ ص) + (س + ٣ ص) + (س + ٤ ص) + (س + ٥ ص) = ٧٨٠

∴ ٦ س + ١٥ ص = ٧٨٠ ...... (١)

ولدينا مجموع الأنصبة للثلاثة الأول :

س+(س+ص)+(س+٢ص)=٣س+٣ص ...... (٢)

ومجموع الأنصبة الباقية :

(س + ٣ص) + (س + ٤ص) + (س + ٥ص) = ٣س + ١٢ ص ... (٣)

ولكن المعادلة (٢) = $\frac{٥}{٨}$ المعادلة (٣) :

∴ ٣ س + ٣ ص = $\frac{٥}{٨}$ (٣ س + ١٢ ص)

∴ ٢٤ س + ٢٤ ص = ١٥ س + ٦٠ ص

∴ ٩ س − ٣٦ ص = صفر

∴ ٣ س − ١٢ ص = صفر

∴ ٦ س − ٢٤ ص = صفر ...... (٤)

من (١) ، (٤) وبحلهما معاً :

٦ س + ١٥ ص = ٧٨٠ ...... (١)

٦ س − ٢٤ ص = صفر ...... (٤)

بطرح (٤) من (١) :

∴ ٣٩ ص = ٧٨٠

∴ ص = ٢٠ ...... (٥)

وبالتعويض عن قيمة ص من (٥) فى (٤) :

∴ ٦ س = ٢٤ × ٢٠ = ٤٨٠ ∴ س = ٨٠

∴ فالأنصبة كالتالى :

٨٠ ، ١٠٠ ، ١٢٠ ، ١٤٠ ، ١٦٠ ، ١٨٠

والأنصبة الثلاث الأولى = ٨٠ + ١٠٠ + ١٢٠ = ٣٠٠

والأنصبة الثلاث الأخيرة = ١٤٠ + ١٦٠ + ١٨٠ = ٤٨٠

، يلاحظ أن ٣٠٠ = $\frac{٥}{٨}$ × ٤٨٠

٢٠ ـ ثلاثة أشخاص مجموع ما معهم ٣٣ جنيهاً فإذا علم أن ما مع الثالث ينقص عن الثانى بنفس المقدار الذى ينقص به الثانى عن الأول .

فإذا أضيف إلى ما مع الأول جنيهاً وأخذ من الثانى جنيهاً وأضيف للثالث جنيهان لأصبح الأول معه ضعف ما مع الثانى والثانى معه ضعف ما مع الثالث ، فهل لك أن تدلنا على المبلغ الذى مع كل منهما .

◄ الحـــل :

فى الحالة الأولى فإن المبالغ التى معهم تُكّون متوالية حسابية ،

مجموعها ٣٣ وحدها الأول غير معروف وأساسها غير معروف إلا أن عدد حدودها = ٣ (ثلاثة أشخاص) .

∴ جـ = ن/٢ [٢ ا + (ن − ١) د]

∴ ٣٣ = ٣/٢ [٢ ا + ٢ د] = ٣ (ا + د)

∴ ا + د = ١١ .... (١)

وفى الحالة الثانية تكون المقادير التى معهم فى توالٍ هندسى لأنه هنالك نسبة ثابتة (الضعف) فيما بين الثانى والأول وهى نفسها فيما بين الثالث والثانى .

∴ (ا + ١) ، (ا + د − ١) ، (ا + ٢ د + ٢) فى توالٍ هندسى

∴ (ا + د − ١)^{٢} = (ا + ١) (ا + ٢ د + ٢)

ومع استعمال العلاقة (١) وبالاختصار :

∴ د^{٢} + د − ٥٦ = صفر ، ∴ (د + ٨) (د − ٧) = صفر

ومنها د = − ٨ أو د = ٧

و ا = ١٩ ، أو ا = ٤

وباعتبار ا = ٤ ، د = ٧

∴ فبعد الإضافة يكون ما مع الأول (٤ + ١) والثانى يكون معه (٤ + ٧ − ١) أى أن الثانى سيكون معه ضعف الأول وهذا بخلاف المسألة .

وعليه فإن هذا الاحتمال مرفوض وتكون قيمة ا = ١٩ ، د = − ٨

∴ المبالغ هى : ١٩ ، ١١ ، ٣

ومجموعها = ٣٣ ، وبعد الإضافة تكون المبالغ ٢٠ ، ١٠ ، ٥ وهو ما يؤكد صحة المسألة .

٢١ ـ أقام أحد النوادى مسابقة فى إحدى المناسبات ، حيث رسمت مجموعة من الخطوط المتوازية على أرض السباق طول كل خط = ٦٠ متراً ووضعت عملات نقود فئة الجنيه بين كل جنيه والآخر مسافة متران ويصطف المتسابقون فى بداية الخطوط ، ويطلب من كل متسابق جمع هذه الجنيهات فى الخط الخاص به بشرط إحضار جنيه بعد جنيه ووضعه فى صندوق بأول الخط عند أول جنيه ، وذلك فى أقصر وقت ممكن والفائز هو الذى يجمع جميع الجنيهات بالخط الخاص به فى أقل وقت ممكن وقيمة الجائزة هى مجموع الجنيهات الموضوعة بالخط الخاص به .

والمطلوب هو حساب طول المسافة التى يقطعها المتسابق الفائز .

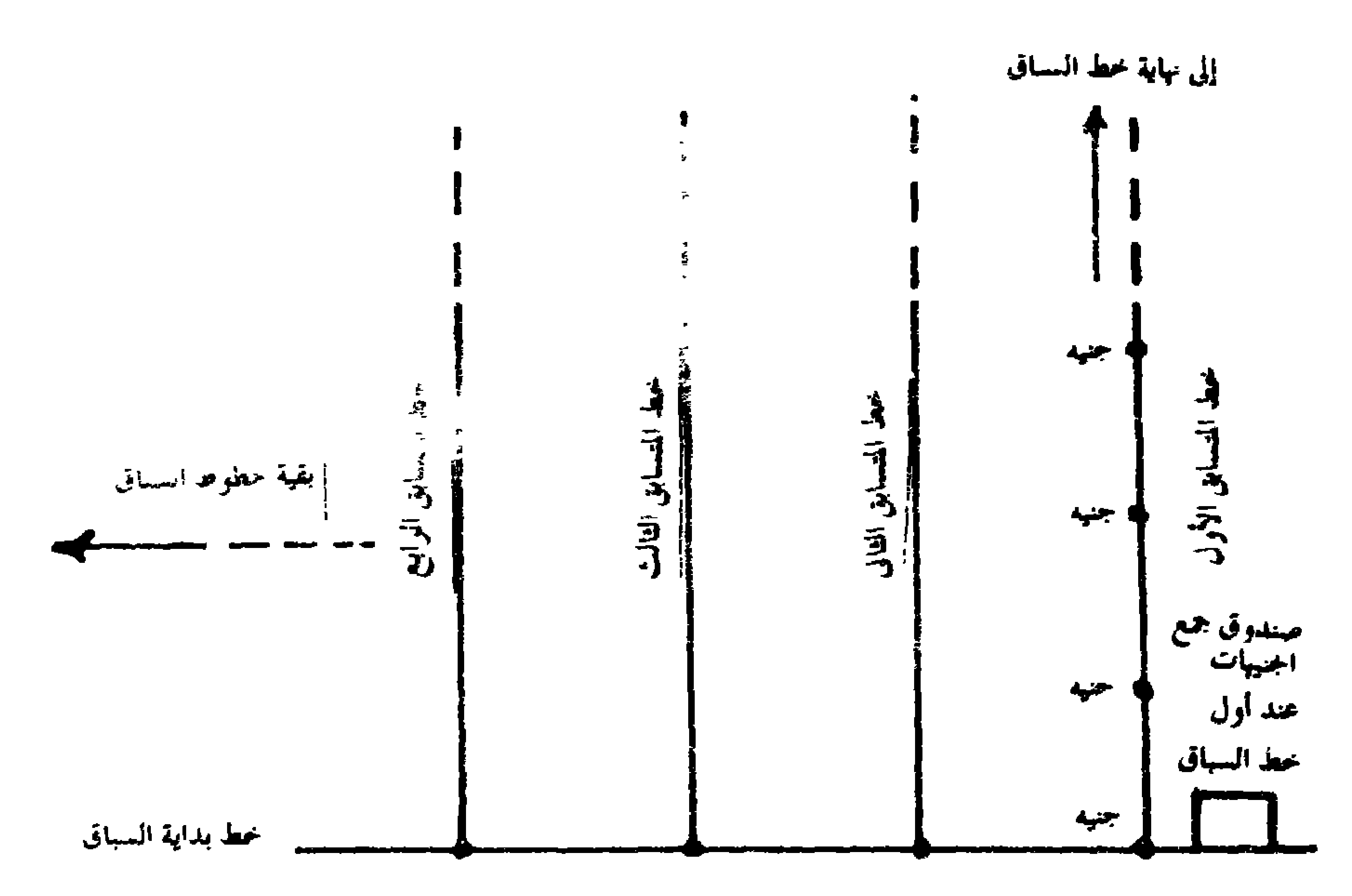
◀ الحـــل :

عدد المسافات بين أول جنيه عند بداية خط السباق وآخرجنيه عند نهاية خط السباق = $\frac{٦٠}{٢}$ = ٣٠ مسافة . كل منها متران

وعدد الجنيهات على كل خط = ٣٠ + ١ = ٣١ جنيهاً .

وللحصول على أول جنيه فى بداية الخط فإن المتسابق لا يجرى أية مسافة تذكر فما عليه إلا أن يلتقطه وهو واقف ببداية الخط ووضعه رأساً فى الصندوق المجاور له ،

بينما الجنيه الثانى فإنه يجرى مترين ثم يلتقطه ويعود أدراجه مسافة مترين لوضعه بالصندوق ، وهكذا فالجنيه الثالث عليه أن يجرى ٤ أمتار (مسافتان) ذهاب ، مثلهم عودة .



والجنيه الأخير رقم ٣١ فإن المتسابق يجرى ٦٠ متراً (٣٠ مسافة) ويعود مرة ثانية نفس المسافة لوضعه بالصندوق .

وعليه فإن مجموع المسافات التى يجريها المتسابق يمكن التعبير عنها كالتالى :

المسافة ف = ٢ [٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ... إلى ٣٠ حداً]

والمقدار بين القوسين يمثل متوالية عددية حدها الأول ا = ٢ وأساسها د = ٢ وعدد حدودها ن = ٣٠

$$\therefore \text{ف} = ٢ \times \frac{\text{ن}}{٢} [٢ \text{ ا} + (\text{ن} - ١) \text{ د}]$$

$$= ٢ \times \frac{٣٠}{٢} [٢ \times ٢ + ٢٩ \times ٢]$$

$$= ٢ \times ١٥ [٤ + ٥٨] = ٣٠ \times ٦٢ = ١٨٦٠ \text{ متراً}$$

***

٢٢ـ أوجد مجموع الأعداد الصحيحة إبتداء من ١ إلى ١٠٠ .

◀ **الحــل :**

الأرقام من ١ إلى ١٠٠ تمثل متوالية عددية حدها الأول ا = ١

وأساسها = ١ وعدد حدودها ن = ١٠٠ وحدها الأخير ل = ١٠٠

∴ فمجموعها جـ = $\frac{ن}{٢}$ (ا + ل)

= $\frac{١٠٠}{٢}$ (١ + ١٠٠) = ٥٠ × ١٠١ = ٥٠٥٠

٢٣ـ أوجد مجموع الأعداد الصحيحة الفردية ابتداء من ١ حتى ٩٩

◀ **الحـــل :**

المطلوب هو حساب مجموع الأعداد ١ ، ٣ ، ٥ ،... ، ٩٧ ، ٩٩

وهى متوالية عددية حدها الأول ا = ١ ، أساسها د = ٢ وحدها الأخير ل = ٩٩

∴ حن = ٩٩ = ا + (ن − ١) د = ١ + (ن − ١) × ٢

∴ ٩٩ = ٢ ن − ١ ∴ ن = ٥٠ حدا

∴ فمجموعها جـ = $\frac{ن}{٢}$ (ا + ل) = $\frac{٥٠}{٢}$ (١ + ٩٩) = ٢٥٠٠

٢٤ـ أوجد مجموع الأعداد الصحيحة الزوجية فيما بين ٢ ، ١٠٠

◀ **الحـــل :**

بنفس الطريقة فإن الحد الأخير = ل = ١٠٠ ، ا = ٢ ، د = ٢

∴ ١٠٠ = ٢ (ن − ١) × ٢

∴ ن = ٥٠

∴ جـ = $\frac{٥٠}{٢}$ [٢ + ١٠٠] = ٥٠ × ٥١ = ٢٥٥٠

٢٥ـ أوجد مجموع جميع الأعداد الصحيحة الواقعة بين ١٠٠ ، ٣٠٠ ولا تقبل القسمة على ١٢ .

◀ **الحــل :**

جميع الأعداد هى ١٠١ ، ١٠٢ ، ١٠٣ ، ...، ٢٩٩

وهى تُكَوّن متوالية حسابية حدها الأول ا = ١٠١ وأساسها د = ١

وحدها الأخير ل = ٢٩٩

، ∴ ح~ن~ = ا + (ن − ١) د

∴ ٢٩٩ = ١٠١ + (ن − ١) × ١ = ١٠٠ + ن

∴ ن = ١٩٩ حداً.

بمعنى أنه هنالك ١٩٩ عدداً فيما بين ١٠٠ ، ٣٠٠ [تقبل ولا تقبل القسمة]

ومجموع جميع هذه الأعداد جـ

جـ = (ن / ٢) [ا + ل] = (١٩٩ / ٢) [١٠١ + ١٩٩]

= ١٩٩ × ١٥٠ = ٢٩٨٥٠

ولنرى الآن الأعداد التى تقبل القسمة على ١٣ والمحصورة فيما بين ١٠٠ ، ٣٠٠ ، نجد أن هذه الأعداد هى : ١٠٤ ، ١١٧ ، ١٣٠، ... ، ٢٩٩

وهى متوالية حسابية فيها : ا = ١٠٤ ، د = ١٣ ، ل = ٢٩٩

∴ ٢٩٩ = ١٠٤ + (ن − ١) × ١٣

٢٩٩ = ١٠٤ − ١٣ + ١٣ ن = ٩١ + ١٣ ن

∴ ن = (٢٠٨ / ١٣) = ١٦ عدداً

ومجموعها = جـ = (١٦ / ٢) [٢ × ١٠٤ + (١٦ − ١) × ١٣]

أ، جـ = (١٦ / ٢) [١٠٤+٢٩٩] = ٨×٤٠٣ = ٣٢٢٤

∴ مجموع الأعداد التى تقبل القسمة على ١٣ = ٣٣٢٤

وعليه فإن مجموع الأعداد التى لا تقبل القسمة على ١٣

= ٢٩٨٥٠ − ٣٣٢٤ = ٢٦٥٢٦

٢٦ـ كيف يمكنك وضع الكسر الدائر ٠,٧٢٣٤ فى صورة مجموع متوالية هندسية لانهائية ، وكيف يمكن حساب مجموعها حتى يصبح الكسر اعتيادياً .

◀ **الحـــل :**

عند إيجاد قيمة المقدار $\frac{1}{9}$ مثلاً نجدها = ∞ ٠,١١١١١

ولسهولة الكتابة والإختصار نكتب $\frac{1}{9}$ = ٠,١ أى نضع نقطة أو صفر فوق الرقم المتكرر إلى ما لا نهاية ويقصد به أنه رقم دائر أو مكرر

وكذلك عند قسمة $\frac{١}{١١}$ مثلاً نجدها = ٠,٠٩٠٩٠٩٠٠٠...

وإختصاراً نكتب $\frac{١}{١١}$ = ٠,٠٩٠ أى أن الصفر والتسعة مكرران أو دائران .

وفى مسألتنا هذه فإن المقدار :

٠,٧٢٣٤ = ∞... ٢٣٤ ٢٣٤ ٠,٧٢٣٤ [أى أن ٢٣٤ دائرة]

ويمكن كتابتها كالتالى :

٠,٧٢٣٤ = ٠,٧ + [٠,٠٢٣٤ + ٠,٠٠٠٠٢٣٤ + ... ∞]

والمقدار بين القوسين يمثل متوالية هندسية لانهائية حدها الأول =

ا = ٠,٠٢٣٤ ، أساسها ر = $\frac{٠,٠٠٠٠٢٣٤}{٠,٠٢٣٤}$ = $\frac{١}{١٠٠٠}$

∴ فمجموعها إلى مالانهاية جـ = $\frac{ا}{١ - ر}$ = $\frac{٠,٠٢٣٤}{١-٠,٠٠١}$ = $\frac{٠,٠٢٣٤}{٠,٩٩٩}$

∴ المقدار = ٠,٧ + $\frac{٢٣٤}{٩٩٩٠}$ = $\frac{٧}{١٠}$ + $\frac{٢٣٤}{٩٩٩٠}$ = $\frac{٧٢٢٧}{٩٩٩٠}$

أى أن مقدار الكسر العشرى ٠,٧٢٣٤ يمكن وضعة ككسر إعتيادى $\frac{٧٢٢٧}{٩٩٩٠}$

وذلك كما ترى باستعمال المتواليات الهندسية اللانهائية .

٢٧ـ ضع ٠,١̇٢̇٦̇ فى صورة كسر اعتيادى .

◄ **الحـــل :**

بنفس الطريقة فإن الرقم ١٢٦ (الواحد والستة والإثنين التى بينهما دائرة) رقم دائر وعليه فإن ٠,١٢٦ ≅ ∞ ٠,١٢٦١٢٦١٢٦١٢٦

= ٠,١٢٦ + ٠,٠٠٠١٢٦ + ٠,٠٠٠٠٠٠١٢٦ + ... ∞

والمقدارعبارة عن متوالية هندسية لانهائية ، حيث حدها الأول ا = ٠,١٢٦ وأساسها ر = ٠,٠٠١

ومجموعها جـ = $\frac{\text{ا}}{١ - \text{ر}}$

جـ = $\frac{٠,١٢٦}{١ - ٠,٠٠١} = \frac{٠,١٢٦}{٠,٩٩٩} = \frac{١٤}{١١١}$

∴ ٠,١̇٢̇٦̇ = $\frac{١٤}{١١١}$

٢٨ـ حول الكسر الآتى ٠,٣٥̇ إلى كسر إعتيادى .

◄ **الحـــل :**

٠,٣٥̇ = ∞ ٠,٣٥٥٥٥

= $\frac{٣}{١٠}$ + [$\frac{٥}{١٠٠}$ + $\frac{٥}{١٠٠٠}$ + ... ∞]

والمقدار بين القوسين متوالية هندسية لانهائية حدها الأول = $\frac{٥}{١٠٠}$

وأساسها = $\frac{\frac{٥}{١٠٠٠}}{\frac{٥}{١٠٠}}$ = ٠,١

∴ فمجموعها = جـ = $\frac{\text{ا}}{١ - \text{ر}} = \frac{\frac{٥}{١٠٠}}{١ - ٠,١} = \frac{٥ \times ١٠}{١٠٠ \times ٩} = \frac{١}{١٨}$

$$\frac{١٦}{٤٥} = \frac{٣٢}{٩٠} = \frac{١}{١٨} + \frac{٣}{١٠} = ٠,٣\dot{٥} \,.$$

٢٩ـ عند إيجاد قيمة المقدار $(٥١)^{٢٠}$ ينتج لنا عدداً فلكياً ويساوى حوالى : $١,٤١٧١ \times ١٠^{٣٤}$ ولكن باستعمال نظرية ذات الحدين كيف يمكننا معرفة الأربعة أرقام الأولى من اليمين [الآحاد والعشرات والمئات والألوف]

◀ **الحـــل :**

نقول : $(٥١)^{٢٠} = (١ + ٥٠)^{٢٠}$ وهو مقدار ذو حدين أحدهما الواحد والآخر هو ٥٠

وطبقاً لنظرية ذات الحدين فى مفكوك هذا المقدار (واحد وعشرون حداً)

$\therefore (١ + ٥٠)^{٢٠} = ١^{٢٠} + {}^{٢٠}ق_{١} \times ١^{١٩} \times ٥٠ + {}^{٢٠}ق_{٢}$
$\times ١^{١٨} \times ٥٠^{٢} + {}^{٢٠}ق_{٣} \times ١^{١٧} \times ٥٠^{٣} + \ldots$ ٢١ حداً

وسوف نكتفى بالأربع حدود الأولى :

$$\therefore (١ + ٥٠)^{٢٠} = ١ + ٢٠ \times ٥٠ + \frac{٢٠ \times ١٩}{} \times ٢٥٠٠$$

$$+ \frac{٢٠ \times ١٩ \times ١٨}{٣ \times ٢ \times ١} \times ١٢٥٠٠٠$$

$$= ١ + ١٠٠٠ + ٤٧٥٠٠٠ + ١٤٢٥٠٠٠٠٠$$

$\therefore$ الأربعة أرقام الأولى = ١ ، ٠ ، ٠ ، ٦   أى ٦٠٠١

٣٠ـ أوجد قيمة $(١١)^{٥}$ بطريقة سريعة .

◀ **الحـــل :**

يمكن إيجاد قيمة هذا المقدار بأكثر من طريقة غير أننا نريد إيجاده بنظرية ذات الحدين .

$$\therefore (١١)^٥ = (١ + ١٠)^٥ = ١^٥ + {}^٥\text{ق}_١ \times ١^٤ \times ١٠^١ + {}^٥\text{ق}_٢ \times ١^٣ \times$$

$$\times ١٠^٢ + {}^٥\text{ق}_٣ \times ١^٢ \times ١٠^٣ + {}^٥\text{ق}_٤ \times ١ \times ١٠^٤ + {}^٥\text{ق}_٥ \times ١٠^٥$$

$$= ١ + ٥ \times ١٠ + \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} \times ١٠٠ + \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} \times ١٠٠٠$$

$$+ ٥ \times ١٠٠٠٠ + ١٠٠٠٠٠$$

$$= ١ + ٥٠ + ١٠٠٠ + ١٠٠٠٠ + ٥٠٠٠٠ + ١٠٠٠٠٠ = ١٦١٠٥١$$

٣١ـ أوجد قيمة $(٠,٩٨)^٥$ مقرباً الجواب إلى ثلاث أرقام عشرية .

◄ **الحـــل :**

يمكن إيجاد قيمة المقدار بكثير من الطرق إلا أننا ينبغى إيجادها مستخدمين فى ذلك نظرية ذات الحدين .

والمقدار $(٠,٩٨)^٥$ يمكن أن نكتبه فى الصورة $(١ - ٠,٠٢)^٥$

وهو مقدار من حدين (واحد ، ٠,٠٢)

$$\therefore (١ - ٠,٠٢)^٥ = ١^٥ - ٥\text{ق}_١ \times ١^٤ \times ٥\text{ق}^٢ \times ١^٣ \times (٠,٠٢)^٢$$

$$- ٥\text{ق}_٣ \times ١^٢ \times (٠,٠٢)^٣ + \ldots\ldots$$

$$= ١ - ٥ \times ٠,٠٢ + \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} \times ٠,٠٠٠٤ - \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١}$$

$$\times ٠,٠٠٠٠٠٨ + \ldots$$

$$= ١ - ٠,١٠ + ٠,٠٠٤ - ٠,٠٠٠٠٨$$

$$= ١,٠٠٤ - ٠,١٠٠٠٨$$

$$= ١,٠٠٤ - ٠,١٠٠٠٨ = ٠,٩٠٣٩٢ \cong ٠,٩٠٤$$

وقد اكتفينا بأربعة حدود فقط وذلك لأن الحدين الأخيرين قيمة كل منهما متناهية فى الصغر .

٣٢ــ بدون فك المقدار $[\sqrt[5]{\text{ل}} + \sqrt[10]{\text{م}}]^{75}$ ، هل يمكنك إيجاد عدد الحدود الخالية من القوى الغير صحيحة ؟

◄ الحــل :

لما كانت القوة المرفوع لها المقدار = ٧٥ ، فإن عدد حدود مفكوك هذا المقدار هي ٧٦ حداً ، ولما كان كلاً من حدى المقدار به جذر لذا فإنه من المنطقى أن يكون بعض هذه الحدود مرفوعاً لقوة كسرية كما أن هنالك بعض الحدود خالية من القوى الغير صحيحة (أى ذات قوى صحيحة) .

وحيث أن الحد العام فى هذا المفكوك = $\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ (الحد الأول)$^{\text{ن}-\text{ر}}$ × (الحد الثانى)$^{\text{ر}}$

$\therefore \text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{75}\text{ق}_{\text{ر}} (\text{ل}^{\frac{1}{5}})^{75-\text{ر}} \times (\text{م}^{\frac{1}{10}})^{\text{ر}} = {}^{75}\text{ق}_{\text{ر}} (\text{ل}^{15 - \frac{\text{ر}}{5}}) \times \text{م}^{(\frac{\text{ر}}{10})}$

ولكى يكون هذا الحد خالياً من القوى الغير صحيحة (أى ذو قوة صحيحة) فإنه يجب أن تكون ر تقبل القسمة على كل من ٥ ، ١٠ بدون باق بحيث أن $\frac{\text{ر}}{5}, \frac{\text{ر}}{10}$ تعطى عدداً صحيحاً وبالتالى فإن المقدار $\text{ل}^{15 - \frac{\text{ر}}{5}}$ وكذلك المقدار $\text{م}^{\frac{\text{ر}}{10}}$ سيكون ذو قوة صحيحة .

والأرقام التى تقبل القسمة على كل من ٥ ، ١٠ وبدون باق ومحصورة بين صفر ، ٧٥ هى [صفر ، ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٦٠ ، ٧٠] .

∴ فهنالك ثمانية حدود من جملة ٧٦ حداً ، خالية من القوى الغير صحيحة أى أن هنالك فقط ثمانية حدود ذات قوى صحيحة .

فمثلاً عندما ر = صفر ،

يصبح أول حد فى المفكوك خالياً من القوى الغير صحيحة هو :

$= {}^{75}\text{ق}_{\text{صفر}} (\text{ل}^{15 - \frac{\text{صفر}}{5}}) \times (\text{م}^{\frac{\text{صفر}}{10}}) = \text{ل}^{15}$

وعندما ر = ١٠

$\therefore$ الحد هو $= {}^{75}\text{ق}_{10} (\text{ل}^{15 - \frac{10}{5}}) \times (\text{م}^{\frac{10}{10}})$

$= {}^{75}\text{ق}_{10}\, \text{ل}^{13}\, \text{م}$ ، وهو الحد العاشر

وعندما ر = ٧٠

∴ الحد هو = $^{٧٥}ق_{٧٠}$ ل$^{١٥ - \frac{٧٠}{٥}}$ × (م$^{\frac{٧٠}{١٠}}$)

= $^{٧٥}ق_{٧٠}$ ل$^{١٥ - ١٤}$ م^{٧}

= $^{٧٥}ق_{٧٠}$ ل م^{٧} وهو الحد السبعون

٣٣ـ حول المقدار ٠,$\dot{١}٣\dot{٥}$ إلى كسر اعتيادى

◄ الحـــل :

المقدار ٠,١٣٥ = ٠,١٣٥١٣٥١٣٥ ..... ∞

$$= \left[\frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠^{٤}} + \frac{١}{١٠^{٧}} + \dots \infty \right]$$

$$+ \left[\frac{٣}{١٠٠} + \frac{٣}{١٠^{٥}} + \frac{٣}{١٠^{٨}} + \dots \infty \right]$$

$$+ \left[\frac{٥}{١٠٠٠} + \frac{٥}{١٠^{٦}} + \frac{٥}{١٠^{٩}} + \dots \infty \right]$$

وكلاً من المقادير بين الأقواس يمثل متوالية هندسية لانهائية .

المتوالية الأولى حدها الأول = $\frac{١}{١٠}$ وأساسها $\frac{١}{١٠٠٠}$

، المتوالية الثانية حدها الأول = $\frac{٣}{١٠٠}$ وأساسها $\frac{١}{١٠٠٠}$

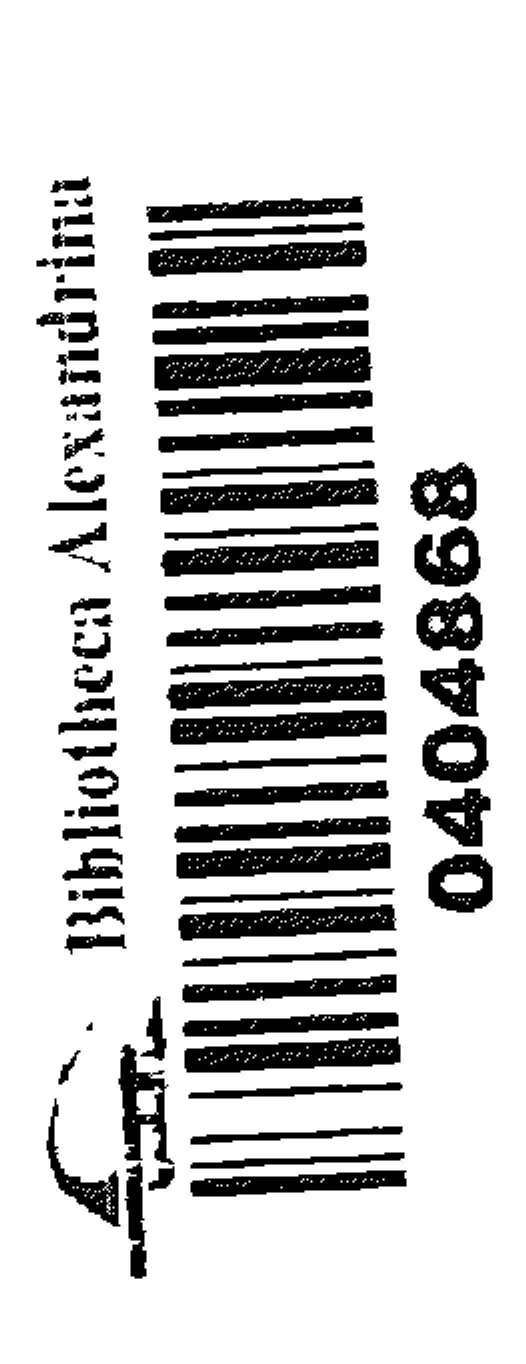
، المتوالية الثالثة حدها الأول = $\frac{٥}{١٠٠٠}$ وأساسها $\frac{١}{١٠٠٠}$ كذلك

∴ فمجموع هذه المتواليات = $\frac{\frac{١}{١٠}}{١ - ٠,٠٠١} + \frac{\frac{٣}{١٠٠}}{١ - ٠,٠٠١} + \frac{\frac{٥}{١٠٠٠}}{١ - ٠,٠٠١}$

$$= \frac{١٠٠}{٩٩٩} + \frac{٣٠}{٩٩٩} + \frac{٥}{٩٩٩} = \frac{١٣٥}{٩٩٩} = \frac{٥}{٣٧}$$

الفهرس

رقم الإيداع بدار الكتب ٤٣٢٨ / ١٩٩٠


Bibliotheca Alexandrina
0404868